Mathematiklernen lernen mit philosophischen Denkmethoden - ein Werkstattbericht

Zusammenfassung

Für die Mathematik soll ein philosophisch motiviertes Kompetenz- genauer Methodenkompetenzmodell skizziert, in einigen seiner wissenschaftsdidaktischen Konsequenzen analysiert und durch zwei konkrete Aufgaben-Vorschläge in seiner unterrichtspraktischen Umsetzbarkeit illustriert werden.

Schlüsselwörter

Mathematik, Philosophie, Kompetenzmodell, Wissenschaftsdidaktik

1. Einleitung

Für die Mathematik sollen ein philosophisch motiviertes Kompetenz- genauer Methodenkompetenzmodell[1]skizziert und Vorschläge für seine unterrichtspraktische Umsetzung vorgestellt werden.
Als wesentliches Merkmal dieses Modells werden grundlegende Kompetenzen durch philosophische Denkmethoden (wie beispielsweise phänomenologische, analytische hermeneutische, dialektische, spekulative und konstruktivistische Methoden) beschrieben, wie sie im Anschluss an klassische Positionen der Philosophie in der modernen Philosophiedidaktik (z.B. Martens, 2003; Rohbeck, 2010.) ausgearbeitet worden sind. Wurden diese Methoden bisher nur zur didaktischen Analyse von Philosophieunterricht eingesetzt, so sollen sie jetzt im Sinne „elementarer Denkmethoden“ (Martens, 2003) auch zur didaktischen Gestaltung in der Hochschulmathematik angewendet werden.
Erste Erfahrungen in Vorkursen, Tutorien und Proseminaren (vgl. Schnieder, 2012; Fest et al., 2012) legen die Vermutung nahe, dass sich mit Hilfe dieses Ansatzes bestimmte, für ein autonomes Lernen[2] im Fach Mathematik hilfreiche Lern- und Arbeitstechniken wie auch philosophische Grundlagenprobleme explizit thematisieren und einüben bzw. diskutieren lassen, und zwar sowohl mit fortgeschrittenen Studierenden ab dem 5. Semester, als auch schon mit Studienanfängern und -anfängerinnen.
Der Aufsatz ist wie folgt aufgebaut: Neben der Einleitung (erster Abschnitt) wird im zweiten Abschnitt die Grundidee des Modells erklärt. Im dritten Abschnitt werden einige allgemeine Thesen und Vermutungen dazu formuliert. Im vierten Abschnitt werden exemplarisch zwei Lernumgebungen zur praktischen Umsetzung des Modells skizziert. Im fünften Abschnitt werden eine Zusammenfassung und ein kurzer Ausblick gegeben.

2. Ein philosophisches (Methoden-)Kompetenzmodell für die Mathematik

[1] Für einen ersten Überblick vgl. (Meyer, 2007: pp. 146 - 161).
[2] Vgl. zum autonomen Lernen (Aebli, 1987) und (Weltner, 1978). Im Sinne des Methodischen Kulturalismus (Hartmann/Janich, 1996) wird hier davon ausgegangen, dass menschliches Handeln im Wesentlichen vernünftiger Planung zugänglich ist (und gerade nicht, etwa deterministisch oder - allgemeiner -naturalistisch missverstanden werden darf als Ergebnis ausschließlich naturwissenschaftlich beschreibbarer Prozesse), ihrer bedarf, und planerische Fähigkeiten allererst erworben, d.h. gelernt werden müssen und auch können. Eine diesem Menschenbild entsprechende und die dieser Arbeit zugrundeliegende Lerntheorie ist die kognitionspsychologisch motivierte Theorie des Lernens von (Aebli, 1981). Insbesondere seine Überlegungen zur Möglichkeit und zur didaktischen Umsetzung problemlösenden und autonomen Lernens in (Aebli, 1981) und unter Bezug auf Weltner (1978) auch in (Aebli, 1987) können als lernpsychologische Grundlage dieser Arbeit gesehen werden.

Der Grundgedanke des Modells besteht darin, mathematische Inhalte und Lernziele solchen philosophischen Denkmethoden zuzuordnen, die bei ihrer selbständigen Erschließung hilfreich sein können. Im Blick auf die Analytische Philosophie könnte das bedeuten, die Begriffe *Begriff*, *These, Argument* und *Argumentation* explizit einzuführen und einzuüben, um sie für die Analyse mathematischer Beweise fruchtbar zu machen. Im Blick auf die Hermeneutik könnte etwa der hermeneutische Zirkel als Methode systematischer Texterschließung vorgestellt und zur Lektüre mathematischer Beweise und Texte unter forschungsgeschichtlicher Perspektive eingesetzt werden. Dieser Grundgedanke kann systematisch ausgebaut und in einem einfachen Kompetenzraster (siehe Anhang) dargestellt werden. In diesem Raster werden die vertikalen Begriffe *Begriff*, *Satz* und *Theorie* mit den fünf wichtigsten Denkrichtungen der Philosophie (vgl. Martens, 2003), nämlich der Hermeneutik, der analytischen Philosophie, der Phänomenologie, der Dialektik und der spekulativen Philosophie "gekreuzt". Dabei stehen die Begriffe *Begriff, Satz* und *Theorie* für die logischen Grundbausteine einer jeden Wissenschaft und insbesondere auch eine unter wissenschaftlicher Perspektive betriebenen Mathematik. Als philosophische Denkrichtungen unterscheidet man horizontal

- **die Phänomenologie,** die auf das korrekte Beschreiben, Wahrnehmen und Erfassen lebensweltlicher und wissenschaftlicher Zusammenhänge abzielt
- **die Analytische Philosophie**, die auf das korrekte Definieren und fehlerfreie und schlüssige Argumentieren abzielt
- **die Hermeneutik**, die auf die korrekte Interpretation geschichtlicher, gesellschaftlicher und individueller Handlungen abzielt
- **die Dialektik**, die auf das Führen gelingender Dialoge und Gespräche abzielt
- **die Spekulative Philosophie**, die auf eine systematische Anregung zu intuitiv-kreativem Denken abzielt.

3. Erläuterungen zum Kompetenzmodell

In diesem Abschnitt sollen einige Erläuterungen zu dem oben skizzierten Kompetenzmodell gegeben werden. Eine ausführliche Argumentation, insbesondere die genaue Verortung im Rahmen neuerer Ansätze zur Wissenschaftsdidaktik wird in einer weiteren Arbeit (für einen ersten Überblick vgl. Schnieder 2012; Fest et al., 2012) nachzureichen sein. Wir können hier nur die unserer Meinung nach wichtigsten Aspekte skizzieren.

(1) Der vorgestellte Ansatz ist wissenschaftsorientiert. Durch die philosophische Perspektive auf mathematische Kompetenzen werden mathematische Begriffe und ihre Definitionen, Sätze und ihre Beweise sowie einzelne Theorien zusammen mit ihrer Begründungsarchitektur zumindest auch unter geltungstheoretischer, d.h. nicht nur unter inhaltlicher Perspektive sondern auch unter ausdrücklich wissenschaftlicher Perspektive betrachtet.

(2) Der vorgestellte Ansatz ist interdisziplinär ausgerichtet. Die einzelnen im Raster dargestellten Kompetenzen, dürften in hohem Maße unstrittig sein und so etwas wie einen größten gemeinsamen Teiler dessen ausmachen, was allen Wissenschaften gemeinsam ist oder in ihrem Selbstverständnis doch sein sollte: Jede Wissenschaft ist aus Begriffen und deren Definitionen, aus Sätzen und deren Begründungen bzw. – im Falle der Formalwissenschaften wie etwa der Mathematik – Beweise sowie schließlich aus Theorien als den logisch-deduktiv geordneten Zusammenhängen zwischen den als wahr durchschauten Sätzen aufgebaut. Dass diese Bauteile im Einzelnen noch nicht das Ganze einer Wissenschaft bestimmen, d.h. dass sie sich als je besonderer Wissenszweig mit einem je besonderen Forschungsinteresse und den sich daraus ableitbaren Forschungsmethoden bestimmen lassen, mag man für offensichtlich halten. Dafür aber, dass man einer wissenschaftlichen Disziplin zu Recht den Charakter der Wissenschaftlichkeit zusprechen kann, dafür stellt der korrekte genau genommen logisch korrekte, d.h. letztlich der trans- bzw. intersubjektiv nachvollziehbare Umgang mit Begriffen, Sätzen und Theorien eine notwendige Bedingung dar, die wohl kaum, weder von den Fachwissenschaftlern und insbesondere von den Mathematikern noch von den Wissenschaftstheoretikern ernsthaft bestritten werden dürfte. In diesem Sinn ist der vorgestellte

Ansatz, so der hier vertretene Anspruch, disziplinär und zugleich interdisziplinär, nämlich das „Allgemeine im Besonderen" verdeutlichend, angelegt.

(3) Der vorgestellte Ansatz eröffnet eine normative Perspektive auf Mathematik und auf Wissenschaft insgesamt. Gerade dadurch, dass mit Hilfe der philosophischen Denkmethoden auch wissenschaftsgeschichtliche Entwicklungen im Blick auf die zugrundeliegenden Forschungs- und Erkenntnisinteressen diskutierbar werden, wird nicht nur ein - gleichsam forschungspragmatisches - Werkzeug angeboten, mit dem einzelne Theorien und Forschungsansätze auf Fehlentwicklungen wie auch auf „Perspektiven und Anknüpfungsmöglichkeiten für ihre produktive und begründete Weiterentwicklung" (vgl. Mittelstrass, 1989: S. 188) untersucht, sondern mit denen insbesondere auch normative Dialoge über das „Treiben von Wissenschaft in Forschung und Lehre als ein zugleich verantwortungspflichtiges und verantwortbares Handeln" (Janich, 2008: pp. 45 f.) geführt werden können. Mit philosophischen Denkmethoden werden also auch Fertigkeiten zum Führen normativer Dialoge vermittelt, die gerade die Autonomie des Wissenschaftlers, seine intellektuelle und moralische Selbständigkeit sichern.

(4) Mit dem oben skizzierten Ansatz werden schwerpunktmäßig mathematische Methoden- bzw. Lernkompetenzen vermittelt. Unser Ansatz beschränkt sich nicht darauf, nur -gleichsam exemplarisch - vorzuführen, wie etwa Beweise als Beweise auf ihren Geltungsanspruch hin überprüft werden können. Vielmehr geht es darum, durch die Vermittlung der philosophischen Denk- und Arbeitstechniken Werkzeuge zur selbständigen Aneignung des erforderlichen Sach- und Fachwissens, d.h. mathematische Lernkompetenz zu vermitteln und dadurch zu autonomem Lernen anzuleiten.

(5) Philosophische Denk- und Arbeitsmethoden liefern lehr- und lernbare Methoden wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens. Philosophie sei hier als apriorische und „systematische Reflexionsdisziplin" verstanden, in der es um begrifflich-argumentative Klärungen im Umfeld von „Wahrheit" und „Geltung" und zwar nicht nur im alltagspraktischen sondern insbesondere auch im wissenschaftlichen Bereich geht. Philosophie und ihre Methoden werden „als kunstvolle Hochstilisierungen alltagssprachlicher Praktiken" (Rentsch, 2007: p. 47) begriffen, deren Methoden und „Argumentationsarsenal" (Spaemann, 1983: p. 108) dann im Sinne eines Graduierungsmodells (vgl. Martens, 2003) im Prinzip von Jedermann im Ausgang von seinen je individuellen intellektuellen Voraussetzungen erlernt werden kann. Nach dieser Auffassung ist Philosophie gerade keine lehr- und lernbare Fachdisziplin nur für Spezialisten mit ausgefeilten Termini, Systemen und Spezialdisziplinen wie Metaphysik, Ethik und Logik. Gerade im Sinne eines Graduierungsmodells könnte die mathematikdidaktische „Transformation" (Rohbeck, 2010: p. 7) philosophischer Denkrichtungen dabei helfen, die großen Unterschiede in den mathematischen Kompetenzen, der Lernmotivation und der allgemeinen Studierfähigkeit etwa bei den Studienanfängern Rechnung abzufedern.

4. Überlegungen zur praktischen Umsetzung

Im Folgenden werden zwei Aufgabensequenzen bzw. Lernumgebungen skizziert, mit denen argumentationstheoretische bzw. analytisch-philosophische Grundkenntnisse vermittelt werden sollen.[3]

---

[3] Die erste Lernumgebung wurde bereits neben anderen ähnlichen Aufgabenstellungen im Rahmen des Mathematik-Vorkurses im WS 12/13 an der PH-Ludwigsburg erprobt. Über die (insgesamt erfreulichen) Ergebnisse wird an anderer Stelle ausführlich zu berichten sein. Die zweite Aufgabe wurde in leicht veränderter Form bereits mehrfach (erfolgreich) im Rahmen mathematischer (Soft-Skill-) Proseminare von Studierenden des 3. und 5. Semesters bearbeitet. Die in diesem Abschnitt skizzierten Materialien können nach Veröffentlichung dieses Artikels auf meiner Homepage eingesehen und heruntergeladen werden.

4.1. Die Lernumgebung *Grundsätze logischer Argumentation*

4.1.1. Skizze der Lernumgebung

- Bringen Sie die Teile der Puzzles „Beweis für die Irrationalität von √2“ und „Gottesbeweis nach Thomas von Aquin“[4] in eine sinnvolle Reihenfolge, dokumentieren Sie Ihre Überlegungen und vergleichen Sie anschließend Ihre Vorgehensweisen.
- Wenden Sie die Begriffe „These“, „Argument“, „Beispiel“, „Form eines Arguments“, „Schlüssigkeit eines Arguments“ und „logisch gültige Schlussregel“ zur Analyse der geordneten Puzzles und Ihrer Vorgehensweise.[5]
- Vergleichen Sie die zwei Beweise „Unendlichkeit der Primzahlen“ unter argumentationstheoretischen Gesichtspunkten und entwickeln Sie ein Verfahren, mit dem Sie unvollständige Argumentationen vollständig rekonstruieren können und vergleichen Sie Ihr Verfahren mit dem Vorschlag in „Zur logischen Rekonstruktion von Argumenten“[6].
- Diskutieren Sie mögliche Konsequenzen aus den vorangegangenen Erkenntnissen für die Kommunikation über und innerhalb der Mathematik. Berücksichtigen Sie dabei auch die Überlegungen von Barwise/Etchemendy (2005, pp. 5 f.).

4.1.2. Bemerkungen zu Lernzielen und zur Didaktik

Die Pointe dieser Aufgabensequenz besteht darin, die Idee der Argumentation, d.h. die (Selbst-)Verpflichtung zur (völligen) Transparenz geltungsorientierter Rede und deren Verwirklichung durch die deduktive Ordnung der Gedanken nach Voraussetzung, Schlussfolgerung, Annahme um des Argumentes willen und verwendeter Schlussregel, zu verdeutlichen – etwa durch eine vergleichende Gegenüberstellung mathematischer und „geisteswissenschaftlicher“ Texte, verbunden mit der womöglich überraschenden Einsicht, dass die Gemeinsamkeiten bei allen Unterschieden im Detail doch überwiegen.
Außerdem sollen konkrete Begriffe und Werkzeuge und Verfahrensweisen aus der Argumentationstheorie erarbeitet werden, die zur Analyse (und später auch zur Konstruktion) mathematischer Beweise eingesetzt bei der systematischen Rekonstruktion oftmals relativ zu den Vorkenntnissen des Lesers sehr verkürzten Beweise angewendet werden können.

4.2. Die Lernumgebung *Calculemus – logisches Deduzieren in Kalkülen*

4.2.1. Skizze der Lernumgebung

- Erarbeiten Sie sich die Begriffe "Kalkül", "Ableitung", "Figur", "Variable" und "Regel". Verwenden Sie als Grundlage den Text *Calculemus!* (Lorenzen, 1968: S. 84 – 86)[7]
- Gegeben sei der Kalkül K_1 (Atomfigur: +; Variable: a; Anfang: +; Regeln: (1) a $\rightarrow$ a o, (2) a $\rightarrow$ + a +).
- Konstruieren Sie eine Ableitung für den Term + + + o o o und zeigen Sie, dass sich der Term + + o + + + nicht ableiten lässt.
- Vergleichen Sie die Kalküle K1 mit den Kalkülen K3 bzw. K4 bzw. K5, die aus K1 durch Erweiterung mit Regel (3) a $\rightarrow$ + a o + bzw. Regel (4) a o $\rightarrow$ a bzw. Regel (5) a $\rightarrow$ + + a hervorgehen.
- Gegeben sind die drei Kalküle K6 "Addition von physikalischen Größen", K7 "Grundlagen der Geometrie" und K8 "Rechnen mit natürlichen Zahlen – das Peanosche Axiomensystem" (vgl. Hilbert/Ackermann, 1967: pp. 113 – 119).

---

[4] Adaptiert von (Aquin, 1956). Überschrift vom Verfasser gesetzt.
[5] Eine mögliche Textgrundlage ist (Tetens, 2004, pp. 22 – 33).
[6] Als gekürzte Fassung und mit einer vom Verfasser gesetzten Überschrift adaptiert von (Tetens, 2004: pp. 38 – 51).
[7] Die Überschrift wurde vom Verfasser gesetzt.

- Konstruieren Sie eine Ableitung der auf dem Arbeitsblatt gegebenen „Figuren“.
- Deuten Sie die Kalküle messphysikalisch, geometrisch und arithmetisch. Verwenden Sie dazu den beiliegenden Text *Axiomatik wissenschaftlicher Theorien* (Hilbert/Ackermann, 1967: pp. 113 – 119).

- Formulieren Sie in je einem Satz eine Erkenntnis, die Sie aus den vorangegangenen Überlegungen für sich gewonnen haben und eine Frage, die für Sie noch offen geblieben ist. Tauschen Sie sich dazu im Plenum aus.
- Kommentieren Sie das nachfolgende Zitat: "Mathematiker denken nicht über Mathematik, als hätten Sie keine konkreten Repräsentationen. Sie zeichnen Diagramme, stellen sich Beispiele vor. Erst danach wird die formalistische Methode angewandt, um die Ergebnisse in eine Reihe abstrakter Deduktionen zu bringen, aus denen jegliche Informationen über den Gedankengang, der zu ihrer Entdeckung führte, getilgt sind." (Fuchs, 1991: pp. 71 – 72)

4.2.2. Bemerkungen zu Lernzielen und zur Didaktik

Zwischen bereits bewiesen bzw. vorauszusetzenden und noch zu beweisenden Behauptungen zu unterscheiden, bereitet vielen Studienanfängerinnen und -anfängern große kognitive Schwierigkeiten. Die didaktische Pointe der zweiten Aufgabe besteht darin, deduktives Schließen in einem ersten Schritt als Verfahren zur Herstellung von Figuren in einem formalen und inhaltlich nicht gedeuteten Kalkül mit endlich vielen und prinzipiell beliebigen Regeln zu simulieren und zu schematisieren. Die fehlende inhaltliche Deutung und der Spielcharakter, indem es auch um Gewinnen und Verlieren geht, soll dazu führen, dass die Beteiligten die Konstruktion ihrer Figuren nur (sic!) auf der Grundlage der gegebenen Regeln durchführen und protokollieren. Erst in einem zweiten Schritt werden dann die Konstruktionen bzw. Ableitungen (sofern möglich) mathematisch-inhaltlich gedeutet (vgl. 5. Punkt). Als Vorbereitung auf die hier vorgestellten anspruchsvolleren Kalküle ist ein elementares Verständnis prädikatenlogischer Symbole ausreichend. Die nachträgliche Deutung der formalen Kalküle kann dann in einer anschließenden Reflexionsphase zu vielfältigen Überlegungen über Mathematik, u. a. über das Lernen und Lehren von Mathematik Anlass bieten.

5. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein philosophisch motiviertes Kompetenzmodell für die Mathematik vorgestellt, in welchem mathematische Denk- und Arbeitstechniken bzw. Kompetenzen systematisch philosophischen Methoden zugeordnet werden, deren Erwerb, so die Vermutung, für die selbständige Aneignung ebendieser mathematischen Kompetenzen besonders hilfreich sein kann. Außerdem wurden zwei Lernumgebungen als Beispiele für die praktische Umsetzung des Modells in konkrete Unterrichtsszenarien skizziert.
Inwieweit sich dieses Modell als hilfreich erweisen wird, etwa die Lernschwierigkeiten von Studienanfängerinnen und -anfängern abzufedern, fortgeschrittenen Studierenden – beispielsweise im Blick auf ihren Studienabschluss -einen vertieften Einblick in hilfreiche Lern- und Arbeitsstrategien zu ermöglichen oder inwieweit er als wissenschaftsdidaktischer Ansatzes auch interdisziplinär fruchtbar gemacht werden kann, muss im Rahmen künftiger Forschungen entschieden werden.

6. Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1981): Denken: Das Ordnen des Tuns. Band II: Denkprozesse. Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H. (1987): Grundlagen des Lehrens. Stuttgart: Klett-Cotta.

Aquin, Th. v. (1956): Summa theologica 1, 2, 3. Auswahl, Übersetzung und Einleitung von Josef Pieper. Frankfurt a. M./Hamburg.

Barwise, J./ Etchemendy, J. (2005): Sprache, Beweis und Logik. Münster: Mentis.

Fest, A. et al. (2012): Learning to learn Mathematics – a concept for a Math bridge course focussing on Epistemology and thinking strategies. (Submitted)

Fuchs, W. R. (1991): Ein mathematischer Strickstrumpf - Betrachtungen über Kalküle. In **Heller, B.** (Ed.):. Kybernetik und Computer. Texte zur philosophischen Auseinandersetzung mit neuen Technologien (pp. 69 – 72). Stuttgart: Klett.

Hartmann, D./Janich, P. (Ed.) (1996): Methodischer Kulturalismus. Zwischen Naturalismus und Postmoderne. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Hilbert, D./Ackermann, W. (1967): Grundzüge der mathematischen Logik. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer.

Janich, P. (2008): Interdisziplinarität, Transdisziplinarität, Metadisziplinarität – Chimäre oder Realität? In: Magerl, G./Schmidinger, H. (Ed.): Einheit und Freiheit der Wissenschaft – Idee und Wirklichkeit (pp. 25 – 46).Wien, Köln, Weimar.

Lorenzen, P. (1968)**:** Protologik. Ein Beitrag zum Begründungsproblem der Logik. In Ders. : Methodisches Denken (pp. 81 – 93). Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Martens, E. (2003): Methodik des Ethik- und Philosophieunterrichts. Philosophieren als elementare Kulturtechnik. Hannover. Siebert.

Meyer, H. (2007): Leitfaden Unterrihctsvorbereitung. Berlin: Cornelsen.

Mittelstrass, J. (1989): Der Flug der Eule. Von der Vernunft der Wissenschaft und der Aufgabe der Philosophie. Frankfurt a. M. Suhrkamp.

Rohbeck, J. (2010): Didaktik der Philosophie und Ethik. Dresden: Thelem.

Schnieder, J. (2013): Mathematikdidaktische Potentiale philosophischer Denkrichtungen. In Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P., Hochmuth, R., Koepf, W., Schreiber S., & Wassong, T. (Eds.). (2013). *Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Spaemann, R. (1983)**:** Die kontroverse Natur der Philosophie. In Ders.: Philosophische Essays (pp. 104 – 129). Stuttgart: Klett.

Tetens, H. (2004)**:** Philosophisches Argumentieren. München: Beck.

Weltner, K. (1978): Autonomes Lernen. Stuttgart: Klett-Cotta.

Autor

Dr. Jörn SCHNIEDER || Universität zu Lübeck, Institut für Mathematik und Dozierenden-Service-Center, TutorInnenschulung ||
Ratzeburger Allee 160, D - 23566 Lübeck

URL

schniede@math.uni-luebeck.de

7. **Anhang**

	Hermeneutische Perspektive	**Phänomenologische Perspektive**	**Dialektische Perspektive**	**Spekulative Perspektive**	**Analytische Perspektive**
Begriff	Unterscheidungsinteressen hinter den Begriffen aufdecken und wissenschaftsgeschichtlich einordnen.	Unterscheidungsinteressen hinter den Begriffen an beobachtbaren Phänomenen und Situationen bzw. der Alltags- und der Wissenschaftspraxis verdeutlichen und beschreiben.	Die Zweckmäßigkeit begrifflicher Unterscheidungen im (inneren) Dialog durch Abwägung von Pro- und Contra-Argumente überprüfen und anderen verständlich mitteilen.	Alternative Begriffsbildungen finden und auf Zweckmäßigkeit und Relevanz überprüfen.	Begriffe exakt und angemessen definieren und präzise verwenden.
Satz	Den Erkenntnisgewinn neuer Argumente und Beweise relativ zum theoriegeschichtlichen und eigenen Vorwissen formulieren.	Sätze (und ihre Begründung) als Interpretation und Verallgemeinerung beobachtbarer (auch innermathematisch gegebener) Situationen, Wissenschafts- und Alltagspraxen verstehen und beurteilen.	Argumentationen und Beweise als (inneren) Dialog, als Abwägung von Pro- und Contra-Argumenten zuspitzen und anderen verständlich mitteilen.	Die Prämissen von Sätzen gedanklich variieren zu neuen, auf Stichhaltigkeit und Relevanz zu prüfenden Vermutungen.	Argumentationen und Beweise auf Stichhaltigkeit und Gültigkeit überprüfen und selber schlüssige Beweise formulieren.
Theorie	Die Geschichte einzelner Theorien aus wirkungs- und gründegeschichtlicher Perspektive rekonstruieren.	Vorgängig gegebene außer- und innermathematische Praxen und Handlungs- und Theoriezusammenhänge als Grundlage für die Konstruktion neuer Ansätze und Theorien nutzen.	Zweckmäßigkeit und Aufbau einer Theorie anderen verständlich mitteilen.	Grundlegende Annahmen und Voraussetzungen von Theorien variieren, weiterentwickeln und die auf theoretische und praktische Relevanz und argumentative Stringenz überprüfen.	Theorien als logisch-deduktive Zusammenhänge bewiesener Sätze rekonstruieren und aufbauen.