1 EINLEITUNG

Diese Arbeit handelt von einer Unterrichtseinheit im Fach Mathematik, die im August und September 2004 in der Klasse 8a an der Thomas-Mann-Schule zu Lübeck durchgeführt wurde. Am Beispiel eines kleinen Ausschnitts aus der Vierecksgeometrie, bildhaft als "Haus der Vierecke" bezeichnet, sollen philosophische und mathematische Aspekte des Definierens untersucht werden: Die Schüler sollen ihre Kenntnisse über Vierecke vertiefen und das Definieren als sinnvolles und notwendiges Verfahren terminologischer Sprachnormierung kennen lernen; sie sollen die mathematikübergreifende Bedeutung des Methodeninstruments "Definition" für eine gelingende Kommunikation in Alltag und Schule erfahren. Um dieses Ziel zu erreichen sind Überlegungen erforderlich, die der Sache nach auf mathematische Verfahren kritisch reflektieren und insofern fachphilosophischen bzw. methodologischen Inhalts sind.

Die Behandlung der Vierecksgeometrie in Untertertia ist traditionell mit den Themen Beweisen und Definieren verbunden, wird aber vom Lehrplan in dieser Verknüpfung nicht (mehr) verbindlich vorgeschrieben. Nach allgemeinen Erfahrungen bereitet die Behandlung dieses Themenfeldes den Schülern große kognitive und affektive Lernschwierigkeiten. Vor diesem Hintergrund kann die geplante Unterrichtsreihe als ein Versuch gesehen werden, die dialektische Spannung aufzulösen: **entweder** fachspezifische Methoden zu vermitteln und dabei demotivierte und gelangweilte Schüler zu riskieren, **oder** die Vermittlung fachspezifischer Verfahren einzuschränken zugunsten einer anwendungsorientierten Geometrieeinheit und einer erfreulichen Lernatmosphäre. In diesem Sinn liegen der Reihenplanung zwei Arbeitshypothesen zugrunde:

1. Ein echtes Verständnis mathematischer Arbeitsverfahren setzt einen fachphilosophisch orientierten Mathematikunterricht voraus.
2. Fachphilosophische Überlegungen eröffnen für Schüler einen motivierenden Zugang zu fachspezifischen Beweis- und Definitionsverfahren.

Selbstverständlich ist die "Testpopulation" zu klein und die Lerngruppe auf keinen Fall repräsentativ für eine "normale" 8. Klasse, um die Gültigkeit der Arbeitshypothesen plausibel zu machen.

2 VORBEDINGUNGEN DES UNTERRICHTS

2.1 DIE KLASSE 8A DER THOMAS-MANN-SCHULE ZU LÜBECK

2.1.1 Äußerer Rahmen

Die Klasse 8a der Thomas-Mann Schule zu Lübeck wird von mir seit Beginn des zweiten Schulhalbjahres 2003/2004 eigenverantwortlich im Fach Mathematik unterrichtet. Sie setzt sich aus insgesamt 30 Schülern (19 Jungen und 11 Mädchen) im Alter von 13 bis 14 Jahren zusammen.

Der Mathematikunterricht wird in dieser Klasse vierstündig erteilt; die Stundenverteilung ist besonders günstig, da sämtliche Mathematikstunden am frühen Vormittag (zweimal 1.Std., zweimal 3. Std.) liegen und schon deshalb kaum Beeinträchtigungen der Konzentrationsfähigkeit der Schüler zu erwarten sind.

Die Klasse 8a der Thomas-Mann-Schule ist eine sogenannte Bili-Klasse: die Schüler erhalten eine zusätzliche Stunde Erdkunde mit Englisch als Unterrichtssprache und haben eine erhöhte Stundentafel in Englisch. Die daraus erwachsende hohe Arbeitsbelastung ist besonders beim Umfang der Hausaufgabenstellungen zu berücksichtigen.

2.1.2 Leistungsstand und Lernverhalten

Dem Aufnahmekriterium für die Bili-Klasse mit ihren hohen Anforderungen an Leistungsbereitschaft und Leistungsvermögen wird schulpolitisch durch eine Bestenauslese nach dem Übergang von der Mittelstufe in die Sekundarstufe I Rechnung getragen.

Diesem Auswahlverfahren entspricht das hohe inhaltliche Niveau des Mathematikunterrichts vom Beginn der 7. Jahrgangsstufe an: durch die gut und sehr gut gesicherten und verinnerlichten Mittelstufenkenntnisse in Geometrie und Algebra verringert sich der Zeitaufwand für langwierige Wiederholungsprozeduren einzelner Stoffgebiete, so dass schon aus diesem Grund mehr Unterrichtszeit für vertiefendes Eindringen oder/und für entdeckendes Erschließen eines Stoffgebietes verfügbar ist.

Dem Leistungsstand der Klasse entsprechend hoch ist das Interesse an Geometrie und zwar sowohl an praktisch konstruierenden geometrischen Aufgabenstellungen als auch insbesondere an Entdeckungs- und damit verbundenen geometrischen Beweisaufgaben. Zugleich herrscht große Aufgeschlossenheit für mathematikgeschichtliche Einbettungen des Geometriestoffes.

Leistungsbeurteilung der Lerngruppe: Zur Leistungsspitze der Klasse rechne ich Phillip, Nils, Hannes, Lars, Sarah, Sören und Henning. Diese Schüler verfügen über ein breites und flexibel anwendbares mathematisches Grundwissen und sind in besonderem Maße zu problemlösendem Denken fähig: ihre kontinuierlichen und engagierten Unterrichtsbeiträge zeichnen sich durch Kreativität, zielgerichtetes Denken und Argumentieren aus.

In den mittleren Leistungsbereich gehören für mich Katharina, Schervin, Hauke, Nadine, Sandra, Janina, Svenja, Lukas, Hendrik, Marten, Hoang, Timo, Thomas, Nico, Anthea, Michel, Maarten und Andrey. Neben einer regelmäßigen Beteiligung auch bei der Lösung und Diskussion von Entdeckungsaufgaben liegen die Stärken dieser Schüler in der Reproduktion und Reorganisation bereits erarbeiteten Wissens. Auch ihnen gelingt es immer wieder, wesentlich lösungsbefördernde Beiträge in das Unterrichtsgeschehen einzubringen; ihre wirkliche Stärke liegt aber im Reproduzieren und Anwenden des bereits Erarbeiteten.

Gemessen am Gesamtniveau der Klasse gehören für mich Michael-Glenn, Marcel, Jana-Aline, Jana und Paloma zu den leistungsschwächeren Schülern der Klasse 8a. Diese Schüler haben häufiger konzeptuelle Schwierigkeiten und damit zusammenhängend eine langsamere Aufnahmefähigkeit beim Erfassen neuer Stoffzusammenhänge. Dennoch haben auch diese Schüler großen Spaß am Lösen und Durchdenken mathematischer Problemaufgaben.

Charakteristisch für die Lerngruppe insgesamt ist die ausgeprägte Leistungsspitze im Verbund mit einem breiten soliden Mittelfeld, so dass die Klasse 8a im Vergleich mit anderen gleichaltrigen Lerngruppen ein weit überdurchschnittliches Leistungsniveau in Mathematik erreicht.

2.1.3 Soziale Aspekte

Die Schüler dieser Lerngruppe verfügen über eine gute Sozialkompetenz: Sie arbeiten und diskutieren am liebsten in Gruppen auch wechselnder Zusammensetzung miteinander, schnellere Schüler helfen bereitwillig und unaufdringlich ihren langsameren Mitschülern; es herrscht eine große Disziplin beim Diskutieren: man lässt sich gegenseitig ausreden, greift Beiträge der Vorredner wieder auf, unterstützt auch unsichere Schüler bei einem Tafelvortrag etc.

2.2 DER LEHRER

Seit meiner Schulzeit habe ich ein besonderes Interesse einerseits an philosophischer Grundlagenforschung der Mathematik und Logik und andererseits an mathematischer Heuristik als der systematischen Auseinandersetzung mit Problemlösestrategien für mathematischen Aufgaben etwa im Rahmen des Bundeswettbewerbs Mathematik und der IMO. Die intensivere Beschäftigung mit diesen Inhalten während meines Studiums hat mich zu der Überzeugung gebracht, dass Mathematikunterricht beides leisten muss: einerseits die Schulung logischen und kreativen Denkens an der Auseinandersetzung mit herausfordernden Aufgaben, andererseits die kritische Reflexion auf wesentliche methodologische Verfahren der Mathematik als Einübung in wichtiger Techniken vernunftbezogenen Denkens und Argumentierens überhaupt.

2.3 KONSEQUENZEN FÜR DIE UNTERRICHTSGESTALTUNG

Das hohe Leistungsniveau und die große soziale Kompetenz der Klasse schaffen eine Lernatmosphäre, die langfristig offenere Unterrichtsformen ermöglicht: hohe Anteile an Gruppenarbeit, Schülereferate, häufige Stunden zu Problemlösendem Denken und mathematikgeschichtlichen und fachphilosophischen Diskussionseinschüben, die Organisation eigenverantwortlicher Arbeitsphasen (auch zur binnendifferenzierenden Förderung von Leistungsspitzen und leistungsschwächeren Schülern) und schließlich die Gründung einer Arbeitsgemeinschaft *Philosophie* charakterisieren den Mathematikunterricht in dieser Lerngruppe.

3 BEMERKUNGEN ZUR SACHE

3.1 PHILOSOPHISCHE ÜBERLEGUNGEN ZU "GEGENSTAND", DEFINITION UND BEWEIS IN DER MATHEMATIK

Es gibt vielfältige Arten von Gegenständen, über die in der Geometrie etwas ausgesagt wird: Quadrate, Geraden, Kreise und Kreisbüschel, Pyramidenstümpfe, Spiegelungen und Drehungen, Mengen usw. Im Unterschied zu Gegenständen des Alltags wie etwa Autos, Stiften, Gläsern, Milch usw. sind die Gegenstände der Mathematik abstrakt: auf sie kann nicht gezeigt werden, sie sind nicht raum-zeitlich fassbar oder sinnlich erfahrbar[1]. Der abstrakte Charakter geometrischer Gegenstände hat weitreichende Konsequenzen für den Aufbau mathematischer Theorien: **1)** Mathematische Gegenstände können nur durch geeignete Definitionsverfahren zu Objekten wissenschaftlicher Forschung werden; ihre Identität kann nicht sprachfrei und durch exemplarische Einführung gelehrt und gelernt werden.[2] **2)** Behauptungen über mathematische Gegenstände können nicht durch erfahrungsabhängige Argumente gestützt werden; mathematische Behauptungen müssen theorieintern begründet, d.h. bewiesen werden.[3]

Ad 1) Definitionen sind Begriffserklärungen; sie legen die Bedeutung eines (Fach-) Begriffs (Zeichen, Wort, Ausdruck) präzise fest und dienen so der klaren Verständigung in Wissenschaft und Alltag[4]. Mathematische Gegenstände werden erst durch ihre Definition zu Objekten einer Theorie. Mathematische Definitionen sind gegenstandskonstitutiv im engen Sinn des Wortes; über die gegebenen Eigenschaften und nur diese Eigenschaften lässt sich der Gegenstand identifizieren und seine Gleichheit mit andersartig definierten Gegenständen aufweisen.

Gerade weil mathematische Gegenstände abstrakt und nicht konkret sind, ist eine

---

[1] Modernen Abstraktionstheorien zufolge beruht die Wahrheitsfähigkeit geometrischer Sätze auf der Möglichkeit, über wohlunterschiedene konkrete Gegenstände - in Absehung von ihren jeweiligen Unterschieden - unter einem bestimmten Aspekt zu reden; der abstrakte Begriff ist dann nichts anderes als eine Abkürzung für diese verfahrensmäßige Vernachlässigung. Vergisst man die Entstehungsgeschichte des abstrakten Begriffs, so kann er leicht als ein Objekt höherer Stufe erscheinen - dieses Phänomen erklärt dann auch, weshalb Abstrakta oberflächengrammatisch als Dinge bzw. Gegenstände behandelt werden. Unabhängig vom ontologischen Status, dem man abstrakten Gegenständen zuzugestehen bereit ist, dokumentiert dieses Verfahren die theoriegeschichtliche Genese eines Begriffs und kann so die Wurzeln theorieimmanenter Widersprüche schneller lokalisieren helfen (wie beispielsweise im Falle Russellschen Antinomie). Vgl. THIEL 1995, S. 110 - 155, LORENZEN 1987, S. 161 - 169, als Hinführung: MITTELSTRAß 1974, S. 158 - 205.

[2] Vgl. insbesondere JANICH 1997, S. 117 - 128, THIEL 1995, S. 273 - 302.

[3] Vgl. MITTELSTRAß 1974, S. 29 - 55.

Verständigung über sie nur auf der sprachlichen Ebene also mit Definitionen möglich: sie können nicht durch das Aufzeigen von Beispielen und Gegenbeispielen oder allgemein durch das Zu- und /oder Absprechen des/der charakteristischen Prädikate von anderen konkreten Gegenständen unterscheidbar gemacht werden; über sie kann ausschließlich auf der begrifflichen Ebene, d.h. mit abstrakten Begriffen geredet werden. Um trotzdem unmissverständlich über mathematische Gegenstände reden zu können, bedarf es der Nominal-Definitionen: Hierbei handelt es sich um eine Auflistung von Begriffen (Merkmalen), die selber nicht weiter erklärungsbedürftig sind, keine Redundanzen enthalten, d.h. unabhängig voneinander sind, und den zu definierenden Gegenstand präzise von anderen Gegenständen abgrenzen.[5]

Die Forderung, dass die erklärenden Begriffe einer Definition selber nicht erklärungsbedürftig sein dürfen, führt notwendigerweise zu einem Abbruch oder einem infiniten Regress in der Bestimmung einfachster Begriffe einer Theorie (hier der Geometrie); Begriffe und die mit ihnen verbundenen Unterscheidungen können nicht ausschließlich mit sprachlichen Mitteln definiert werden[6]. Vielmehr sind (auch) mathematische Begriffe und die mit ihnen verbundenen Unterscheidungen und Unterscheidungspraxen auf außermathematische Interessen zurückzuführen, deren Durchsetzung und Rechtfertigung nicht selber Teil des mathematischen Diskurses sind[7]. Die pointierteste Form dieser arbeitspraktischen Sichtweise methodologischer Schwierigkeiten beim Definieren bieten David Hilberts berühmte *Grundlagen der Geometrie.*[8]

Ad 2) Da Geometrie keine Erfahrungswissenschaft ist[9] und geometrische Behauptungen

---

4 Vgl. SCHÜLERDUDEN PHILOSOPHIE.

5 Vgl. MITTELSTRAß 1974, S. 189.

6 Dies hat bekanntlich auf fachphilosophischer Ebene zu tiefgreifenden und äußerst kritischen Einschätzungen des Wissenschaftscharakters (nicht nur) der Mathematik geführt. Vgl. THIEL 1995, S. 330 - 350, überblicksartig SCHÜLERDUDEN PHILOSOPHIE, Eintrag: *Philosophie der Mathematik.*

7 Deswegen verwundert es auch nicht, wenn z. B. Euklid in seinem ca. 325 v. Chr. verfassten *Elementen*, dieser großen damaligen Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, auf die philosophischen Meinungsverschiedenheiten zwischen Platon und Aristoteles bzw. ihren Schulen nicht mit einem Wort eingeht, ja dass er zu ontologischen und erkenntnistheoretischen Fragen überhaupt nicht Stellung nimmt: "Man kann darin wohl ein Indiz dafür sehen, dass eine Entscheidung, ob die Mathematik eine Wirklichkeits- oder Idealwissenschaft sei, in den Aufbau der Mathematik selbst nicht eingeht." THIEL 1995, S. 29.

8 Für einen ersten Überblick gut geeignet sind THIEL 1995, S. 72 - 76 und S. 241 - 245.

9 Geometrie kann nicht als Erfahrungswissenschaft konzipiert und ihre Behauptungen können nicht als Erfahrungssätze über konkrete Gegenstände experimentell bestätigt werden. Eine solche realistische oder physikalische Interpretation geometrischer Sätze würde in einen Begründungszirkel führen: Wären eine empirische Interpretation geometrischer Theorien möglich, dann müssten sich die Sätze dieser physikalischen Geometrie in der Anwendung eines Messverfahrens überprüfen und entscheiden lassen. Dem Bauplan und der mit ihm verbundenen Anwendungsregel der jeweiligen Messgeräte liegt aber bereits die auszumessende Geometrie als Norm zur Beurteilung ihrer Funktionstüchtigkeit zugrunde. Vgl. ausführlich JANICH 1997, S. 117 - 128.

- insofern sie als Behauptungen über abstrakte Gegenstände interpretiert werden - nicht experimentell begründbar sind, bedarf es zur Begründung von Aussagen über die rein begrifflich gegebenen Gegenstände geometrischer Theorien besonderer Verfahren: diese mathematische Begründungsverfahren nennt man in Abgrenzung zu entsprechenden Verfahren etwa der Erfahrungswissenschaften "Beweis". Wesentlich für die Rechtfertigung allgemeingültiger Aussagen über abstrakte Gegenstände ist die per definitionem gesicherte Identität und Individualität der zu untersuchenden Gegenstände. Ein wesentliches Mittel ist die Begriffsklärung als Ausschluss von Verwechslungen: Nur durch die korrekte Definition der verwendeten Begriffe können mögliche Verwechslungen mit anderen (abstrakten) Gegenständen ausgeschlossen werden ("no entity without identity"). In diesem Sinn sind Definitionen (und Beweise im Allgemeinen) ein technisches Hilfsmittel relativ zum allgemeinen Zweck des Geltungsausweises theoretischer Satzgefüge und Sätze.[10]

3.2 GEOMETRIE IM HAUS DER VIERECKE

Als Teilbereich der (ebenen) Schulgeometrie werden im "Haus der Vierecke"[11] die Eigenschaften gewisser Viereckstypen und die zwischen ihnen bestehenden logischen Beziehungen untersucht. Die Liste der dabei erfassten Vierecke ist keineswegs kanonisch festgelegt[12]; in der Regel umfasst sie traditionell die bekannten Figuren Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, (achsensymmetrischer) Drachen und (achsensymmetrisches) Trapez.

Die Definition der relevanten Viereckstypen lässt bekanntlich einen gewissen Spielraum zu: Abhängig von den betrachteten Viereckseigenschaften lassen sich auf vielfältige Weise verschiedene aber äquivalente Definitionen für den gleichen Viereckstyp finden.

Aus didaktischen und methodischen Gründen und im Anschluss an die Vorkenntnisse der Lerngruppe (vgl. Bemerkungen zur Didaktik und Methodik) werden hier Definitionskriterien favorisiert, die sich auf die Seiten des Vierecks und ihre gegenseitige Lage beziehen:

- Ein **Parallelogramm** ist ein Viereck, in dem **beide** Paare gegenüberliegender Seiten parallel sind.

---

[10] Vgl. LORENZEN 1987, S. 9 *ff.*

[11] Für "unser" "Haus der Vierecke" vgl. NEUE WEGE 8, S. 58, hier abgedruckt im Anhang, S. 30.

[12] Einen Überblick über die Alternativenvielfalt bietet VOLKERT 1999.

- Ein **Trapez** ist ein Viereck, in dem **ein** Paar gegenüberliegender Seiten parallel ist.
- Ein **symmetrisches Trapez** ist ein Viereck, in dem ein Paar gegenüberliegender Seiten die gleiche Mittelsenkrechte besitzt.
- Ein **Drachen** ist ein Viereck, in dem die Diagonalen orthogonal zueinander stehen und sich halbieren.
- Eine **Raute** ist ein Viereck mit vier gleich langen Seiten.
- Ein **Rechteck** ist ein Viereck mit vier rechten Winkeln
- Ein **Quadrat** ist ein Viereck mit vier gleich langen Seiten und vier rechten Winkeln.[13]

Aus didaktischen und methodischen Erwägungen (vgl. Bemerkungen dazu) werden die Beziehungen zwischen den einzelnen Viereckstypen ausschließlich unter dem Gesichtspunkt bestehender Inklusionsverhältnisse untersucht[14]. Zum Beweis dieser Ordnungsaussagen müssen Sätze über Stufen- und Wechselwinkel und deren Umkehrungen, sowie verschiedene Kongruenzsätze angewendet werden[15].

---

13 Wie in der Mathematik üblich, sind die benutzten Eigenschaften innerhalb einer Definition unabhängig voneinander.

14 "Lokales Ordnen" im "Haus der Vierecke" als Unterrichtsschwerpunkt zu wählen, ist in der didaktischen Diskussion umstritten. Das Konzept dieser Einheit intendiert geradezu eine Propädeutik lokalen Ordnens auf begrifflicher und satzlogischer Ebene. Vgl. hierzu sehr formal HOLLAND 1996, an Freudenthal anschließend SERVAIS 1981 und besonders anregend und kritisch FREUDENTHAL 1973, Band 1: S. 125 - 138 und Band 2: S. 375 - 390.

15 Die betrachteten Viereckstypen und ihrer Eigenschaften sind in einer Tabelle zusammengestellt (vgl. Anhang, S. 16); sie ist zwar keineswegs erschöpfend (Symmetrieeigenschaften werden nicht systematisch untersucht), reicht aber für die hier verfolgten Ziele völlig aus.

4 DIDAKTISCHE ÜBERLEGUNGEN UND ENTSCHEIDUNGEN

4.1 BEMERKUNGEN ZUR LERNGESCHICHTE DER KLASSE 8A

Im Geometrieunterricht des Vorjahres wurden Winkelsätze, Dreiecke und zugehörige Schnittpunktsätze sowie der Satz des Thales mit Umkehrung behandelt. Der methodische Schwerpunkt des Unterrichts lag auf der beweisenden Anwendung der Kongruenzsätze für Dreiecke und ihrer Konstruktion; dabei wurde das Beweisen als Übungsfeld zum entdeckenden und problemlösenden Denken inszeniert, deduktive Aspekte des Beweisens sind immer wieder thematisiert worden (im Rahmen einer unterrichtlich initiierten Metareflexion auf die Unterrichtstätigkeit), waren aber nicht eigens Unterrichtsgegenstand. Dem entsprechend wurden Beweistätigkeiten als inhaltlich korrekte Argumentationen eingeübt, deren Verschriftlichung im Sinne größerer inhaltlicher und sachlogischer Übersichtlichkeit die Form inhaltlicher Schlussketten hatte. In der ersten Woche des neuen Schuljahres wurden Kongruenzsätze für Vierecke erarbeitet und die Eigenschaften wichtiger Viereckstypen wiederholt. (Achsensymmetrisches) Trapez und (achsensymmetrischer) Drachen sind zusätzlich zu den anderen Viereckstypen bereits im 1. Halbjahr der siebten Klasse behandelt worden und waren für die Schüler mindestens auf der phänomenologischen Ebene vorerschlossen.

Obwohl die bearbeiteten Beweise nicht unter dem Gesichtspunkt der "Lückenlosigkeit" und nach formalen Kriterien der "Strenge" geführt wurden und ein auf die Beweisfigur möglichst verzichtender Beweis nicht intendiert war (und sein konnte), tauchte bei einer großen Mehrheit der Klasse schon damals die Frage nach einem "absoluten Ende" des Beweisens als Gewissheitsfundament auf[16]. Die Notwendigkeit selbst trivial erscheinende geometrische Sachverhalte in voller Allgemeinheit zu beweisen wurde durch das allgemein akzeptierte Ziel, möglichst keiner (optischen) Täuschung zu unterliegen, eingesehen - freilich ohne zu erklären, warum überhaupt bei "geometrischen Experimenten" die Gefahr der Täuschung bestehen kann.

[16] Im Unterrichtsgespräch wurde sogar die Möglichkeit diskutiert, ob und inwiefern die Kongruenzsätze für Dreiecke ein in diesem Sinne erstes Fundament geometrischer Theoriebildung darstellten; man muss es fast als demokratisch gefassten Beschluss der Klasse werten, sich vom Lehrer auf den späteren Geometrieunterricht vertrösten zu lassen und vorerst den Satzbestand der Kongruenzsätze als Fundament zu akzeptieren.

4.2 DAS CURRICULARE UMFELD

Mit der geplanten Unterrichtsreihe wird der in Sexta begonnene Geometriekurs fortgesetzt. Die Geometrieausbildung in Sexta und Quinta hat eine propädeutische Funktion[17]; in Sexta werden beispielsweise die einfachen Viereckstypen, fundamentale geometrische Relationen wie "senkrecht" und "parallel" und der Begriff der Symmetrie und Achsenspiegelung untersucht bzw. eingeführt[18]. In Quinta werden dann Kreise, Winkel, einfache Abbildungen und Grundkonstruktionen betrachtet[19]. Insbesondere die Mittelsenkrechten kommen hier bereits vor. In Quarta ist die Untersuchung von Dreiecken ein Schwerpunktthema des Lehrplans: Mithilfe der Winkelsätze werden die Kongruenzsätze für Dreiecke eingeführt (um dann besondere Linien im Dreieck zu behandeln)[20]. Die Behandlung einfacher Beweise im Sinne inhaltlichen Argumentierens gewinnt zunehmend an Bedeutung; ein stärker systematisierender Aufbau der Geometrie wird damit eingeleitet[21].

Für Schüler der 8. Jahrgangsstufe ist die "Geometrie an Vierecken und am Kreis" gemäß Lehrplan Mathematik für Gymnasien verbindlich vorgeschrieben; dabei soll ein inhaltlicher Schwerpunkt dieses Themas auf der Behandlung wichtiger Viereckstypen und ihrer Eigenschaften liegen[22]. Zu den wichtigen Vierecken im Sinne des Lehrplans werden dabei "Quadrat, Rechteck, Raute, Parallelogramm, Trapez und Drachen" gerechnet. Zwar schreibt der Lehrplan die Behandlung ordnungs- und beweislogischer Aspekte der Vierecksgeometrie nicht als kanonischen Unterrichtsschwerpunkt vor, aber: "für die Mathematik typische Arbeitsweisen"[23] wie beispielsweise Verfahren der "Begriffsentwicklung"[24] und der "sachorientierten Diskussion"[25] zu vermitteln, gilt als "Schulung des Denkens"[26] und ist als "Auseinandersetzung mit den Kernproblemen"[27] der Grundbildung lehrplangemäß erwünscht. Den Interessen und der Leistungsfähigkeit

[17] Vgl. HOLLAND 1996, S. 19.
[18] Vgl. LEHRPLAN MATHEMATIK, S. 24 *f*.
[19] Vgl. LEHRPLAN MATHEMATIK, S. 28.
[20] Vgl. LEHRPLAN MATHEMATIK, S. 62.
[21] Vgl. HOLLAND 1996, S. 17 *ff*.
[22] Vgl. LEHRPLAN MATHEMATIK, S. 67.
[23] LEHRPLAN MATHEMATIK, S. 16.
[24] LEHRPLAN MATHEMATIK, S. 16.
[25] LEHRPLAN MATHEMATIK, S. 19.
[26] LEHRPLAN MATHEMATIK, S. 16.
[27] LEHRPLAN MATHEMATIK, S. 16, vgl. auch ebd. S. 5.

der Klasse angemessen, werde ich in diesem Sinn die "fachspezifischen Hinweise" des Lehrplans als Empfehlung aufgreifen und einen didaktischen Schwerpunkt auf methodologische Aspekte des Themas[28] setzen: Am Beispiel des Beziehungsgeflechts der Vierecke im "Haus der Vierecke" werden Techniken des (mathematischen) Definierens (und Beweisens) erarbeitet und eingeübt.

Die geplante Unterrichtsreihe ist im Kern auf ca. 10 Stunden, d.h. ungefähr 2,5 Unterrichtswochen angelegt. Zusammen mit dem Vorunterricht in der ersten Schuljahreswoche, der Klassenarbeit, ihrer Vorbereitung und Auswertung wird dieser Unterrichtsblock ca. 4,5 Wochen dauern. Ich habe mich dazu entschlossen die verbleibenden zwei Themenfelder der Geometrie, Flächen- und Kreislehre, in einer eigenen Unterrichtsreihe zu behandeln. Dadurch wird der lehrplanmäßig vorgeschriebene Gesamtwochenanteil für Geometrie überstiegen; dementsprechend werde ich den lehrplangemäßen "Raum für vertiefendes [...] fächerübergreifendes Arbeiten"[29] ausnutzen.

4.3 MATHEMATIKDIDAKTISCHE ASPEKTE AM "HAUS DER VIERECKE"

Das "Haus der Vierecke" bietet Schülern die Möglichkeit, an einem eng begrenzten Objekt- und Begriffsfeld Abhängigkeiten, Regelmäßigkeiten und Identitäten zu erkennen und zu beschreiben. Auf diese Weise lernen die Schüler eine Vorgehensweise moderner Mathematik kennen, die von fächerübergreifender Bedeutung ist: Das Definieren ("Was ist ein Quadrat?") und Ordnen vorgefundener Phänomene ("Alle Quadrate sind Rechtecke, aber nicht umgekehrt.") sind Grundtätigkeiten des Mathematikers. Erfahrungsgemäß werden die mit dieser Tätigkeit verbundenen formalen und argumentationslogischen Anforderungen, zumal unter philosophischer Perspektive, für Schüler als trockenes, langweiliges und lernschwieriges Thema angesehen. Um den Schülern dieses abstrakte Lernfeld dennoch anbieten zu können, werde ich mich auf die Behandlung des vorgeschriebenen (und der im Vorunterricht erarbeiteten) Minimalkatalogs der Viereckstypen Quadrat, Rechteck, Raute, Parallelogramm, (achsensymmetrisches) Trapez und (achsensymmetrischer) Drachen und ihren Inklusionsverhältnissen beschränken. Die thematische Vorerschlossenheit dieser Vierecke, die Möglichkeiten ihrer Visualisierung und die dadurch gegebene

[28] Vgl. LEHRPLAN MATHEMATIK, S. 67.

Reduktion an Vielfalt und Struktur im "Haus der Vierecke" sollen die Schüler vor Überlastung und Frust bewahren und auch die außermathematischen Lernziele der Unterrichtsreihe für verschiedene Kompetenzebenen erreichbar halten. Durch die Nutzung geeigneter Visualisierungsmöglichkeiten lässt sich der Aufbau im Haus der Vierecke veranschaulichen und handlungsorientiert (enaktiv) erfahrbar machen. Auf diese Weise sollen die Schüler möglichst eigenständig ihr Grundwissen zur Vierecksgeometrie festigen und vertiefen. Von den konkreten Unterrichtsinhalten abstrahieren und die Ergebnisse auf andere (auch außermathematische) Fragestellungen übertragen zu können, wird von Schüler zu Schüler unterschiedlich sein, setzt dieser Transfer doch eine Verinnerlichung der erarbeiteten Ergebnisse voraus, die in so kurzer Zeit (ca. 3 Wochen) nicht zu erwarten steht. Dennoch ermöglicht die geplante Bearbeitungsform (vgl. dazu Durchführung der 5. und 6. Unterrichtsstunde) allen Schülern, einen Mindestbestand an mathematischem Grundwissen zur Vierecksgeometrie zu erwerben.

Auch dieses stark verkleinerte und ordnungslogisch sehr einfach strukturierte "Haus der Vierecke" bietet genügend Raum für entdeckendes Lernen: trotz der Reduktion lassen Umfang und Komplexität des zugrundeliegenden Katalogs von Viereckseigenschaften immer noch genügend Raum für ein Entdecken überraschender Beziehungen zwischen einzelnen Vierecken, sowie vieler Eigenschaften einzelner Vierecksstypen. Mathematik selber erforschen zu können, ist für Schüler ein intellektuelles Abenteuer, das als wesentliches Motiv mathematischer Bildung das Beweis- und Begründungsbedürfnis der Schüler weiter stärkt und zur sach- und argumentbezogenen Auseinandersetzung mit mathematischen Sachverhalten anregt.

4.4 PHILOSOPHIEDIDAKTISCHE ASPEKTE DES THEMAS

Die Überlegungen der Sachanalyse lassen sich zu fünf Grundgedanken zusammenfassen, die am Beispielfeld Vierecksgeometrie im Verlauf der Einheit erarbeitet und verdeutlicht werden sollen:

1) Vierecke sind abstrakte bzw. ideale geometrische Figuren und existieren nur in Gedanken; (gezeichnete) Vierecke in der Wirklichkeit sind immer nur - abhängig von der Zeichengenauigkeit - Annnäherungen an das gewünschte Ideal.

---

[29] Vgl. LEHRPLAN MATHEMATIK, S. 20.

2) Nur durch mathematische Definitionen kann über Vierecke so geredet werden, dass keine Verwechslungen mit anderen abstrakten Gegenständen (insbesondere anderen Vierecken) zu befürchten sind.
3) Jeder Viereckstyp kann auf sehr verschiedene Weise definiert werden. Nur durch einen (mathematischen) Beweis kann entschieden werden, ob sie tatsächlich das gleiche Viereck bezeichnen.
4) Es gibt keine Begriffe, die aus sich verständlich sind; es gibt keinen Katalog mathematischer (Grund-) Begriffe, die keiner weiteren Definition bedürftig sind.
5) Für den arbeitenden Mathematiker bedeutet das: Versuche nicht zu erklären, was ein Viereck ist, sondern benutze nur die definierenden Eigenschaften, um durch logisches Denken allein auf die weiteren Eigenschaften des Vierecks zu schließen.

Diese fünf Grundgedanken markieren zugleich die Hauptlernziele der geplanten Unterrichtsreihe und sollen im Folgenden eingehender didaktisch analysiert und begründet werden:
Ad 1) In einem ersten Schritt muss bei den Schülern ein radikaler Bruch zum Geometrieverständnis der Orientierungsstufe erzeugt werden; der Geometrieunterricht der fünften und sechsten Klasse baut auf die handwerklich-konstruktiven und lebensweltlich vorerschlossenen Erfahrungsanteile aller Schüler auf (z.B. Umgang mit räumlichen Gegenständen); er betreibt Geometrie (notwendigerweise) als "Wissenschaft" des Anschauungsraumes, deren Entdeckungen letztlich experimentell verifiziert werden. Um dieses verzerrte Bild zu erschüttern müssen die Schüler erkennen, dass geometrische Gegenstände abstrakt und gezeichnete Figuren nur Näherungen an ein ideales Gedankenkonstrukt sind. Nur diese Erkenntnis kann die strengen begrifflichen und argumentativen Anforderungen an den Beweis mathematischer Behauptungen erklären und rechtfertigen.
Allgemein erhalten die Schüler ein Beispiel für die maßgebliche Bedeutung der Unterscheidung abstrakt/konkret: diese Unterscheidung gibt ihnen ein Instrument an die Hand, mit dessen Hilfe sie für Begründungsdefekte beliebiger Diskurse sensibilisiert werden und das ihnen hilft, kritisch und eigenverantwortlich zu denken und zu entscheiden[30].
Ad 2) Die Schüler sollen erkennen, dass ihr bisheriges Verständnis und ihre Sichtweise

[30] In diesem Sinn die geplante Einheit dem Konzept der Grundbildung und der Auseinandersetzung mit

von Geometrie zu oberflächlich sind und zu Fehlern führen können. Es ist daher notwendig, ihre Sichtweise zu präzisieren und die für ein einwandfreies Definieren notwendigen Schritte deutlich zu machen und einzuüben: wenn geometrische Dinge abstrakt sind, also nur in Gedanken existieren, dann muss sichergestellt werden, dass verschiedene Menschen nicht nur die gleichen Wörter beim Reden über mathematische Gegenstände verwenden, sondern tatsächlich auch an die gleichen Gegenstände denken[31]. Es ist gerade der Sinn von Definitionen, eine fehlerfreie Kommunikation zu ermöglichen und Verwechslungen zu verhindern. Mit der Erarbeitung dieses Lernziels sollen Schüler den Sinn von mathematischen Definitionen verstehen; sie sollen die Notwendigkeit solcher Begriffsnormierungen einsehen und geometrische Definitionen nicht schon wegen ihrer oft anschaulich gewählten Beispiele für überflüssig halten. Darüber hinaus sollen sie erkennen, dass diese Verfahren nicht nur für das Gelingen von Mathematik, sondern auch beim Treffen von Entscheidungen und Formulieren von allgemeinen Zielen wichtig sind: Das systematische und verständliche Denken kann bei der Wahl z.B. des richtigen Berufes genauso wichtig sein, wie bei anderen, das ganze Leben betreffende Entscheidungen[32].

Ad 3) Beim Erarbeiten konkreter Definitionen für spezielle Viereckstypen wird sich zeigen, dass es verschiedene Definitionen ein und desselben Gegenstandes geben kann. Die Schüler sollen erkennen, dass dieses Ergebnis nicht auf anschauliche Weise sondern nur theoretisch unter Verwendung der erarbeiteten Definitionen eindeutig bewiesen werden kann. Sie sollen an diesem Beispiel Sinn und Zweck mathematischer Beweise kennen lernen und die (vorunterrichtlich erschlossene) Unterscheidung zwischen Voraussetzung und Behauptung eines Beweises in ihrer fundamentalen Bedeutung für das Richtigkeit mathematischer Begründungen erkennen (die Einführung der Wenn - Dann - Satz - Terminologie und die Rede von der "Umkehrung eines Satzes" hat in diesem Zusammenhang eher methodisch die Funktion, die besondere Bedeutung und Konsequenz dieser Unterscheidung herauszustellen[33]).

Kernproblemen, vgl. LEHRPLAN PHILOSOPHIE, S. 17 - 18 und LEHRPLAN MATHEMATIK, S. 4 *f.*

31 Wann ein abstrakter Gegenstand zurecht als existierend angenommen wird, ist nur vermittels einer logisch aufwendigen Rekonstruktion seiner Konstitution zu entscheiden (auf sie muss deshalb an dieser Stelle verzichtet werden); dieses didaktisch bedingte Begründungsdefizit kann durch die Visualisierungsmöglichkeiten einer als Theorie des Anschauungsraumes und der praktisch verwirklichten idealen geometrischen Formen verstandenen Euklidischen Geometrie methodisch überwunden werden. Vgl. hierzu philosophisch: MITTELSTRAß 1974, S. 187 - 199, didaktisch: s.o. .

32 In diesem Sinn soll die Einheit einen Beitrag zur "Erziehung zu Mündigkeit" leisten. LEHRPLAN PHILOSOPHIE, S. 16.

33 Mit der Wenn-dann-Terminologie soll gerade nicht zur Beschreibung logischer Implikationen dienen, wie etwa bei HOLLAND 1996, S. 42 f. Auch die Logische Termini eigens als zweckgebundene Operatoren einzuführen

Ad 4) und 5) Die Schüler sollen erkennen, dass die Forderung nach fachwortfreien und deshalb vollkommen verständlichen Definitionen mathematischer Begriffe nicht erfüllbar ist; sie sollen erkennen, dass Definitionen geometrischer Grundbegriffe entweder einen Zirkel enthalten oder abbrechen, im strengen Sinn also keine Definitionen sind. Ihnen soll verdeutlicht werden, dass auch die Mathematik den strengen Anforderungen an die Verständlichkeit ihrer Sprache letztlich nur dann genügen kann, wenn die Verständlichkeit ihrer Grundbegriffe vorausgesetzt werden kann und gegeben ist. Diese Einsicht darf natürlich nicht zu einer resignativen Einstellung gegenüber der Mathematik bzw. dem Mathematikunterricht führen; vielmehr soll sie die Schüler sensibel machen für das Instrument Sprache: sie sollen lernen, sich präzise und verständlich auszudrücken und Präzision und Verständlichkeit von ihren konkreten und fiktiven (Zeitung, Fernsehen) Gesprächspartnern einzufordern[34]. Damit wird eine wichtige Grundlage für eine aktive und verantwortungsvolle Teilnahme an gesellschaftlichen, demokratischen Entscheidungsprozessen gelegt und ein wichtiger Beitrag zur Immunisierung der Schüler gegen die falsche Versprechen (politischer) Herrschaftsrhetorik geleistet.

Das methodische Ungenügen ihrer Definitionsverfahren bleibt für eine formalistisch verstandene Mathematik[35] unproblematisch: Für den formalistischen Mathematiker sind mathematische Gegenstände vollständig durch den definierenden Merkmalskatalog individuiert; der Formalist erschafft - in seinem Selbstverständnis - mathematische Gegenstände (relativ zur axiomatischen Grundlage) durch seine eigenen Definitionen; ob diese Gegenstände in der (physikalischen) Wirklichkeit eine Entsprechung finden, ist - nach seinem Selbstverständnis - für den Erfolg seiner Arbeit unerheblich. Existenzgrundlage dieser Gegenstände ist ein formal geführter Widerspruchsfreiheitsbeweis. Selbstverständlich unterstreicht diese Position den hypothetischen Charakter mathematischer Theorien; ihr geht es nicht um inhaltliche Geometrie als Theorie des praxisleitenden Anschauungsraums, ihr geht es um Implikationszusammenhänge zwischen bereits als bewiesen unterstellten oder als Axiom gesetzten Behauptungen; die inhaltliche Richtigkeit ihrer Ausgangssätze, aufgefasst als Interpretation in der Wirklichkeit, bleibt unerheblich.

---

scheint ein neuer Ansatz in der gegenwärtigen didaktischen Diskussion zu sein.

34 Auf diese Weise erschließt sich ihnen "menschliche Gesellschaft [...] als eine Gemeinschaft [...], in der es immer auch um die Verständigung über die angemessene Orientierung des Lebens und Zusammenlebens geht." LEHRPLAN PHILOSOPHIE, S. 16.

35 Einführend vgl. SCHÜLERDUDEN PHILOSOPHIE, Eintrag *Philosophie der Mathematik*, weiterführend und

Am Beispiel dieser wichtigen Position im Streit um die erkenntnistheoretischen Grundlagen moderner Mathematik soll den Schülern ein Ausweg aus dem methodischen Ungenügen mathematischer Definitionsverfahren aufgezeigt werden: Mathematische Definitionen sind nicht als Beschreibung sprachunabhängig gegebener Gegenstände intendiert; vielmehr konstituieren sie durch eine Konstruktionsvorschrift den mathematischen Gegenstand. Dieser Ansatz führt zu einem wichtigen Gebot für den täglichen Umgang mit Mathematik und den *working mathematician*: Definierende Eigenschaften **dürfen** ohne Beweis als gegeben angenommen werden, alle anderen Eigenschaften **müssen** mathematisch unter ausschließlicher Anwendung der definierenden Eigenschaften bewiesen werden. Gerade dieses Gebot betont die wichtige Unterscheidung zwischen Voraussetzung und Behauptung. In seiner unmissverständlichen Schärfe soll es die Schüler für die strenge Trennung zwischen Voraussetzung und Behauptung sensibilisieren[36].

4.5 ALLGEMEINDIDAKTISCHE ÜBERLEGUNGEN ZU EINEM PHILOSOPHISCH ORIENTIERTEN MATHEMATIKUNTERRICHT

Die Planung meiner Unterrichtsreihe wurde auch durch allgemeinere Überlegungen beeinflusst, die sich zu zwei Kernthesen zusammenfassen lassen:

1) Schon lehrplanübergreifende allgemeinste Lernziele legen die philosophische Akzentuierung der Unterrichtsreihe nahe.

2) Der philosophische Zugriff kann die innermathematischen Tugenden der Beweisbedürftigkeit und des methodisch disziplinierten Umgangs mit (mathematischen) Begriffsbildungen fördern.

Diese Thesen seien im Folgenden eingehender erläutert: **Ad 1)** Unsere moderne Gesellschaft ist eine durch Demokratie, (Natur-) Wissenschaft und Technik geprägte Kultur[37], deren Funktionieren ein rationales Denken und Handeln notwendig macht, d.h. differenziertes und kritisches Denken, korrektes und präzises Sprechen und folgerichtiges Handeln[38]. Eine wichtige Aufgabe von Schule besteht somit darin, den Schülern obengenannte Fähigkeiten verständlich zu machen, zu vermitteln und

kritisch: THIEL 1995, S. 20 *ff*, 342 *ff.*

[36] Im Sinne einer "Schulung des Denkens", LEHRPLAN MATHEMATIK, S. 16.

[37] Vgl. VON HENTIG 1985, S. 115.

[38] Vgl. LEHRPLAN MATHEMATIK, S. 17.

einzuüben[39]. Mathematik und Geometrie sind Wissenschaften, an denen sich paradigmatisch wesentliche Grundzüge rationalen Handelns und Argumentierens herausstellen, lehren und lernen lassen. Relativ zu den allgemeingesellschaftlichen Aufgaben von Schule und Erziehung bedeutet das für den Mathematikunterricht: Das Verfahrensmaterial der Mathematik sollte den Schülern in seiner fächerübergreifenden Verbindlichkeit[40] bei der Erörterung und Entscheidung in jeglicher Art von Sachfragen helfen[41]; den Schülern muss bewusst werden, dass die Definitions- und Beweisverfahren der Mathematik auch fächerübergreifend anzuwenden sind[42]. Mit den Schülern die Gründe beispielsweise für die Vorgehensweise bei der Bildung mathematischer Begriffe zu erarbeiten, bedeutet auch, sie über den (logischen) Sinn und die Anwendungsreichweite solcher Verfahren aufzuklären. Verfahrensanalysen dieser Art gehören nicht mehr zum genuinen Arbeitsbereich der Mathematik selbst, sie reflektieren auf geltungstheoretische Aspekte mathematischer Tätigkeit und sind insofern philosophischen Inhalts.

Ad 2) Beweise und Verfahren mathematischer Begriffsbildung können nicht algorithmisiert[43] und rezeptartig abgearbeitet werden. Ihr Gelingen hängt nicht von einer bloßen Konzentrationsleistung ab. Die Heuristik aufgefasst als *Lehre über das Finden von Beweisen und Begriffen*[44] ist aus diesem Grund unsystematisch; die passende Strategie auf ein vorliegendes Beweisproblem anzuwenden, bleibt als eigentliche Aufgabe bestehen. Es ist deshalb schwierig, Schülern Idee und Technik des Beweisens und der Begriffsbildung allein über die geschickte Auswahl von Beispielen und Gegenbeispielen gelingender Beweistätigkeit bzw. geschickter Begriffsbildung vermitteln zu wollen. Die Regeln der Heuristik sind so offen, dass ihre ausschließlich exemplarische Vermittlung sehr hohe Ansprüche an die mathematische Begabung,

---

39 Vgl. VON HENTIG, S. 115 *f.*

40 Mit den für das gesellschaftliche Leben wesentlichen Verfahren der Vernunft bekannt zu machen, ist eine Möglichkeit des Mathematikunterrichts Schüler in "weiterführende Lebens-, Denk- und Handlungszusammenhänge" (LEHRPLAN MATHEMATIK, S. 7) einzuführen. Auf diese Weise leistet ein fachphilosophisch ausgerichteter Mathematikunterricht einen Beitrag "zur Bildung und Erziehung" von Schülern, der geradezu einen - vielleicht bislang zu unrecht übersehenen - Legitimationskern des schulartübergreifenden Unterrichtsfaches Mathematik darstellen kann.

41 Die Vermittlung heuristischer Fähigkeiten als eine speziell auf mathematische Inhalte bezogene Lehre vom strategischen Problemlösen ankommt

42 Vielmehr gilt: nur weil diese Methoden in der Mathematik angewendet werden, kann diese den Anspruch zu Recht erheben, eine Wissenschaft zu sein. Vgl. MITTELSTRAß 1974, S. 8 *ff.*

43 Das ist der sachlogische Kern der Gödelschen Unvollständigkeitssätze. Für eine erste Einführung gut geeignet ist THIEL 1995, S. 221 - 237.

44 Vgl. LEUDERS 2003, S. 131 *ff.*

Kreativität und Erfahrung des je einzelnen Schülers stellt[45]. Demgegenüber könnte die Thematisierung unter explizit philosophischem Akzent auch normalbegabten Schülern ein Verständnis mathematischer Beweis- und Definitionsverfahren ermöglichen: Diese Methoden zum eigenständigen Unterrichtsgegenstand zu machen, sie von Schülern entdecken zu lassen, ihren logischen Sinn und ihre Unverzichtbarkeit für eine funktionierende Mathematik zu verdeutlichen, könnte Schülern - unabhängig von ihrem mathematischen Leistungsniveau - die fächerübergreifende Bedeutung dieser Verfahren verdeutlichen.

4.6 VERLAUSPLAN DER EINHEIT

Im Verlauf der Einheit sollen die fünf Grundgedanken nacheinander abgearbeitet und den Schülern ein in sich geschlossener, d.h. logisch folgerichtiger Gedankengang vorgestellt werden[46]. Die fünf Grundgedanken repräsentieren die Eckpfeiler einer dreiteiligen und spiralförmig geordneten Unterrichtseinheit, die ungefähr 10 Unterrichtsstunden umfassen soll:

<u>Erster Durchlauf (1. - 4. Stunde der Einheit):</u>

- Erarbeitung: Geometrische Gegenstände sind abstrakt und reine Gedankenkonstrukte.
- Problematisierung I: Man muss das Verwechslungsproblem lösen, um über geometrische Gegenstände kommunizieren zu können.
- Erarbeitung: Definitionen sind Werkzeuge zur Lösung des Verwechslungsproblems (Definition der Definition, Wie findet man überhaupt Definitionen?)
- Anwendung: Das Erstellen vielfältiger Vierecksdefinitionen.

<u>Zweiter Durchlauf (5. - 8. Stunde der Einheit):</u>

- Problematisierung (und Vertiefung) II: Man kann die Äquivalenz von Vierecksdefinitionen nur im Beweis überprüfen.
- Anwendung: Äquivalenzbeweise für Vierecksdefinitionen
- Vertiefung: Unter den vielfältigen Definitionen eines Viereckstyps lassen sich "gute Definitionen" auszeichnen; sie besitzen Merkmale, durch die das mathematische

[45] Vgl. LEUDERS 2003, S. 133.

Arbeiten mit ihnen wesentlich erleichtert wird.

Dritter Durchlauf (9. - 10. Stunde der Einheit):

- Problematisierung III: Auch gute Definitionen sind nicht perfekt. Definitionszirkel gefährden die mathematische Kommunikation.
- Erarbeitung (Sicherung): Wie man mit Definitionen arbeiten muss, um Definitionszirkel zu vermeiden.

4.7 LERNZIELE UND KOMPETENZEN DER EINHEIT

Im Folgenden sind die im Verlauf der geplanten Einheit zu vermittelnden Kompetenzen und die ihnen entsprechenden Lernziele dargestellt:

4.7.1. Sachkompetenz

Die Schüler sollen

- die Eigenschaften verschiedener Viereckstypen kennen,
- die Inklusionsverhältnisse zwischen den Viereckstypen kennen,
- den Sinn von Definitionen benennen können,
- Merkmale guter Definitionen kennen,
- wissen, dass mathematische Gegenstände abstrakt und ideal sind und deshalb
- mathematische Behauptungen nur theoretisch begründet werden können.

4.7.2. Methodenkompetenz

Die Schüler sollen

- erlernte Definitionsverfahren zur Definition besonderer Vierecke anwenden,
- handwerkliche Hilfsmittel zur Untersuchung von Viereckseigenschaften anwenden,
- mathematische Methoden und Verfahren im Rahmen komplexerer Beweise anwenden,
- für ihr Denken und Sprechen Gründe zu fordern und
- konsequent, folgerichtig und differenziert zu argumentieren,
- lernen mit einem Fachwörterbuch zu arbeiten,
- ihre Vortragstechnik bei der Präsentation ihrer Arbeitsergebnisse trainieren.

---

[46] Für die Diskussion alternativer und immer noch schlüssiger Verlaufspläne vgl. 7. KRITISCHER RÜCKBLICK.

4.7.3. Selbstkompetenz

Die Schüler sollen

- Sicherheit im Umgang mit mathematischen Denk- und Vorgehensweisen erlangen,
- ihre eigenen Erfahrungen im Umgang mit Mathematik zum Gegenstand ihrer Aufmerksamkeit und zur Grundlage ihres Denkens und Sprechens machen,
- ihr Vorverständnis von Mathematik am Beispiel der Geometrie klären und
- so vermeintlich Selbstverständliches in Frage stellen und dadurch ihren bisherigen Erfahrungshorizont überschreiten,
- die fächerübergreifende Bedeutung mathematischer Definitionsverfahren erkennen,
- im Präsentieren eigener Ergebnisse Selbstsicherheit erlangen.

4.7.4. Sozialkompetenz

Die Schüler sollen ihre Teamfähigkeit verbessern, indem sie

- sich in Gruppen- und Partnerarbeit gegenseitig unterstützen und korrigieren,
- ihre Gruppen- und Partnerarbeit zeitökonomisch, d.h. zielgerichtet, arbeitsteilig und kooperativ organisieren und
- die sachorientierte Kommunikation untereinander verstärken und sich mit sich und anderen vernunftgeleitet auseinander zu setzen.

4.8 SICHERUNG UND LERNZIELKONTROLLE

Die meisten Unterrichtsstunden der Einheit verfolgen mathematisch inhaltliche und zugleich philosophische Lernziele. Aus philosophiedidaktischer Sicht besteht ein wesentliches Ziel der Unterrichtseinheit in der Ausbildung argumentativer Kompetenz: Die Schüler sollen durch den Verfolg und die (weitestgehend selbständige) Entwicklung eines durchgängigen Gedankengangs zu folgerichtigem und differenzierten Denken erzogen werden. Dieses Lernziel ist (notwendigerweise) sehr abstrakt und nur im aktiven Gespräch vermittelbar; Argumentationskompetenz ist nur im erörternden Gespräch kontrollierbar zugänglich (die schriftliche Erörterung ist dem Deutschunterricht der 9. Jahrgangsstufe vorbehalten; sie kann und soll in dieser Einheit den Schülern nicht abverlangt werden, vgl. aber Hausaufgabe der 12. Stunde, siehe Analyse). Zur größtmöglichen Nachvollziehbarkeit des Unterrichtsgangs sollen die Kernthesen der Einheit durch entsprechende Arbeitsblätter so dokumentiert werden, dass die Schüler mit ihnen wesentliche Eckpfeiler der Argumentation (und damit des Unterrichtsverlaufs) rekapitulieren können. Zusätzlich sollen "Gedankenprotokolle" als Sicherung und Lernzielkontrolle dienen. Sie werden häufig zu Beginn der Stunde abgerufen, die Schüler sollen hier wichtige Inhalte der Vorstunde(n) zusammen mit den wesentlichen Begründungsschritten und Überlegungen vorstellen. Selbstverständlich handelt es sich hierbei um eine anspruchsvolle Aufgabe, die weit über die bloße Sicherung erzielter Arbeitsergebnisse hinausreicht; sie muss deshalb eingeübt werden und kann nur schrittweise in die häusliche Erarbeitung übergeben werden. Sie stellt aber ein Instrument dar, das den Lernstand gerade auch ruhigerer Schüler zu kontrollieren gestattet.

Die mathematischen Inhalte der Unterrichtsreihe werden durch entsprechende Aufgabenblätter vertieft und gesichert: das Lehrbuch (wie auch andere gängige Schulbücher) unterscheidet sich in der didaktischen Anlage deutlich von meiner Reihenkonzeption, es soll daher nicht eingesetzt werden.

Grundsätzlich verzichte ich auf das Stellen umfangreicher Hausaufgaben: die mathematischen Inhalte sollen im wesentlichen in der Stunde eingeübt und vertieft werden, um die systematische Entwicklung des Gedankengangs nicht durch zu intensive Übungsphasen zu unterbrechen. Das mögliche Übungs-Defizit wird in einer eigenen Vorbereitungsphase für die Klassenarbeit aufgefangen: Zur vertiefenden Wiederholung der erarbeiteten Inhalte werden dann weitere Aufgaben behandelt (für eine Auswahl vgl. Anhang, S.29 *f.*).

Die Bewertung der Schülerleistungen setzt sich aus einer schriftlichen Arbeit und der mündlichen Mitarbeit zusammen. Während der Gruppenarbeitsphasen werde ich die Schüler im Hinblick auf Teamfähigkeit und ihren persönlichen Einsatz für die Gruppe beobachten.

5 BEMERKUNGEN ZUR METHODIK

5.1 DIE GENETISCHE METHODE ALS ÜBERGEORDNETES UNTERRICHTSKONZEPT

Das methodische Konzept der Unterrichtsreihe orientiert sich am Ideal präziser und stringenter Argumentation: Begründen und Argumentieren sind für Mathematik und Philosophie gleichermaßen konstitutiv; in der mathematikdidaktischen Diskussion findet dieses Ideal seinen Ausdruck in der Konzeption eines genetisch verfahrenden Mathematikunterrichts, dessen charakteristische Merkmale zusammen mit entsprechenden Beispielen aus der Unterrichtsreihe im folgenden genannt seien[47]:

- Der *Anschluss an das Vorverständnis*[*] der Schüler erfolgt auf einer mathematisch-inhaltlichen und einer methodischen Ebene: Sämtliche Viereckstypen sind lebensweltlich und unterrichtlich vorerschlossen, sie wurden im Vorunterricht der 5., 6. und 7. Jahrgangsstufe behandelt und definiert. Inhaltliches Schließen, Argumentieren und Definieren wurde an ausgewählten Beispielen im Vorjahr eingeübt.
- *Einbettung der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte außerhalb und innerhalb der Mathematik*: Die philosophischen Überlegungen zur Vierecksgeometrie haben eine mathematikübergreifende Bedeutung; der exemplarische Charakter der Vierecksgeometrie wird den Schülern zu Beginn der Unterrichtsreihe explizit verdeutlicht. Dabei erfolgt *während des Voranschreitens allmähliche Erweiterung des Gesichtskreises und entsprechende Standpunktverlagerungen*; die Überlegungen werden zunächst an einfachsten Beispielen vollzogen, nach und nach erfolgt eine zunehmende Verallgemeinerung auf alle anvisierten Vierecke, auf außermathematische Beispiele, etc.
- *Zulässigkeit einer informellen Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus* und *Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze:* Schülerformulierungen bilden den inhaltlichen und systematischen Ausgangspunkt für die Problematisierung, die Erarbeitung und sachlogisch richtige Normierung der Begriffe "Definition", "Rechteck", "Quadrat", ... und ihrer Merkmale und Eigenschaften.

---

[47] Vgl. WITTMANN 1978, S. 124 *ff.*

- Um eine *durchgehende Motivation und Kontinuität* der Reihe zu sichern, werden die Reihenbausteine nach sachlogischen Kriterien angeordnet: Die Schüler sollen die Notwendigkeit Begriffe zu definieren selber erfahren, um daran anschließend das Definieren als Instrument zur Begriffsklärung wahrzunehmen und aus dieser Aufgabe selber die wesentlichen Merkmale guter Definitionen zu entdecken, etc.

Ein fachphilosophischer Zugriff auf das Thema "Definieren (und Beweisen) in der Geometrie" spiegelt - so könnte man obengenannte Überlegungen verallgemeinern - den wissenschaftsgeschichtlich relevanten Weg von der Rezeptmathematik zur Beweismathematik wieder - und entspricht damit im weitesten Sinn dem Ideal genetisch verfahrenden Mathematikunterrichts:
Es ist eine kulturgeschichtliche Tatsache, dass die Möglichkeit von Wissenschaft überhaupt erst entdeckt werden musste; es war keineswegs selbstverständlich, über die Zusammenstellung praktischer Regeln zur Lösung konkreter Aufgaben hinausgehend die Ausarbeitung von Theorien zu fordern, d.h. theoretische Sätze zu formulieren und für sie eine allgemeingültige Begründbarkeit (bzw. Beweisbarkeit) zu beanspruchen. Vielmehr ist die Entdeckung der Möglichkeit von Wissenschaft überhaupt das Ergebnis einer ausdrücklich philosophischen Anstrengung, deren Dauer sich über einen Zeitraum vieler Jahrhunderte hinweg erstreckte (und die genau genommen bis heute andauert)[48]. Diese wissenschaftsgeschichtliche Tatsache verdeutlicht, dass der "natürliche(n) erkenntnistheoretische(n) Prozess der Erschaffung und Anwendung von Mathematik"[49] auf fachphilosophische Überlegungen angewiesen ist, wenigstens aber durch diese maßgeblich gefördert wird. Ist die Rolle der Philosophie für diesen Entwicklungsgang nicht zufällig, sondern Ausdruck lernpsychologischer Notwendigkeiten, dann sollte ein genetisch verfahrender Mathematikunterricht diesen Entwicklungsgang (zumindest im Prinzip) nachzeichnen und sich insbesondere philosophische Überlegungen zu nutze machen, um die methodologischen Regeln der Mathematik zu klären und zu vermitteln.

5.2 ARBEITS- UND SOZIALFORMEN

- [*] Die kursiven Textstellen dieses Abschnitts sind zitiert nach WITTMANN 1978, S. 124 *ff.*

[48] Vgl. MITTELSTRASS 1974, S. 29 *ff.*

[49] Vgl. WITTMANN 1978, S.124.

Grundsätzlich spielen alle vier möglichen Sozialformen, d.h. Unterrichtsgespräch (als Frontalunterricht), die Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit in dieser Unterrichtsreihe eine wichtige Rolle: Das Unterrichtsgespräch dient in Auswertungs- und Sicherungsphasen zur Darstellung und gemeinsamen Erarbeitung der jeweiligen Unterrichtsinhalte: Die sachlogisch richtige und fachsprachlich angemessene Formulierung der (philosophischen) Arbeitsergebnisse kann von Schülern nicht erwartet werden; sie erfolgt im Unterrichtsgespräch. Gerade dadurch ist dem Lehrer eine zeitökonomische Kontrollinstanz gegeben, die es gerade gestattet, Problematisierungs- und Erarbeitungsphasen offen und schülerzentriert als Gruppen- oder Partnerarbeit zu gestalten.

Partnerarbeitsphasen werden von mir häufig zur Bearbeitung einführender Aufgaben oder zur Durchführung von Brainstormingphasen eingesetzt, um einerseits vielfältige Lösungs- und Formulierungsansätze zu erhalten und andererseits auch solche Schüler am diskursiven Gedankenaustausch zu beteiligen, die in größeren Gruppen eher zurückhaltend sind.

Die in dieser Unterrichtseinheit bevorzugte Sozialform ist die Gruppenarbeit; sie nimmt in der Planung mehr als die Hälfte der Unterrichtszeit in Anspruch: Die in den einzelnen Unterrichtsblöcken sehr komplexen und arbeitsintensiven Aufgaben stellen hohe Anforderungen an Problösefähigkeit, Teamfähigkeit und eigenverantwortliches Arbeiten: die Arbeitsaufträge können nur durch gegenseitige Hilfe und geschickte Arbeitsteilung zügig gelöst werden; sie erfordern eine kooperierende Bearbeitung, in denen nicht zuletzt Kommunikation und Diskussion hocherwünscht sind.

Auf die Gruppenbildung nehme ich keinen Einfluss: Im Vorunterricht haben sich Stammgruppen gebildet, die besonders erfolgreich zusammenarbeiten. Der sozialen Kompetenz der Klasse entsprechend sind diese Gruppen nicht leistungshomogen; vielmehr finden sich in jeder Gruppe leistungsstärkere Schüler, so dass das Leistungsniveau in der Aufgabenbearbeitung relativ einheitlich bleibt, ohne dass die leistungsschwächeren Schüler von kompetenteren Mitschülern "erdrückt" werden.

In dieser Unterrichtseinheit werden vielfältige Arbeitsformen (Experiment, Gespräch, Diskussion, Arbeit am Text und mit Tabellen und Lexika) eingesetzt, auf die hier nicht gesondert eingegangen werden soll. Zu ihrer jeweiligen Begründung sei auf die Planungsüberlegungen in der Beschreibung der Durchführung verwiesen.

5.3 AUSWAHL DER MEDIEN

In dieser Unterrichtseinheit werden vielfältige Medien eingesetzt: Neben den üblichen Medien wie Arbeitsblätter, Overhead-Projektor (OHP) und Tafel, werden auch Bilder (Comics), Pinwände, Plakatmaterial, Moderationskarten (bedruckt und unbedruckt), Lexika und Experimentiermaterial (Holzstäbe, Stifte, Mikroskope, u.a.) eingesetzt.

Die Arbeitsblätter sind von mir zusammengestellt, greifen aber viele Anregungen aus Schulbüchern und Internet auf: Sie dienen als Beschreibungs- und Diskussionsgrundlage in Erarbeitungsphasen, auf ihnen werden wesentliche Ergebnisse zur Sicherung schriftlich fixiert. Pinwände und Moderationskarten gestatten eine flexible Handhabung auszuwertender Ergebnisse, die Tafel dient zur Sammlung von Ideen in Brainstormingphasen und zur schriftlichen Fixierung und Ordnung von Diskussionsverläufen insbesondere in Auswertungsphasen.

5.4 METHODEN DES PHILOSOPHIERENS

In dieser Unterrichtsreihe werden vielfältige Methoden eingesetzt, die im einzelnen in der Durchführungsplanung besprochen werden. Besonders wichtige und häufig eingesetzt werden **Gedankenexperiment**, **Bilder bzw. Karikaturen und Begriffsanalysen**.

Der unterrichtliche Einsatz von Bild und Gedankenexperiment kann vielfältige Funktionen erfüllen[50]; für die Planung dieser Reihe war ihre heuristische Funktion besonders wichtig: Gedankenexperiment und Bild sollen die Schüler mit Gedanken und Fragen konfrontieren, die sich ihnen allein aus ihren Vorerfahrungen und Fragegewohnheiten nicht erschließen und deren selbständige Erarbeitung deshalb Schülern nicht zugemutet werden kann bzw. nur unter erheblicher Lenkung möglich ist. Der kontrafaktische und überzeichnende Charakter von Gedankenexperiment und Bild provoziert die Phantasie der Schüler und regt sie an, fiktive Szenarien durchzuspielen, die dem gesunden Menschenverstand zuwider laufen, Bekanntes und (vermeintlich) Selbstverständliches hinterfragen und dadurch die besondere Bedeutung bestimmter Verfahrensweisen (wie etwa des Definierens) herauszustellen.

Die einfachste Form der **Begriffsanalyse**[51] unterscheidet in einer Menge von Beispielen

[50] Für das Folgende vgl. BRÜNING 2003, S. 76 - 82, S. 132 *f.*, STEENBLOCK 2002, S. 149 *ff.*, S. 169 *ff.* zu didaktischen Analyse des Gedankenexperiments vgl. besonders ENGELS 2004.

[51] Vgl. BRÜNING 2003, S. 44 - 47, STEENBLOCK 2002, S. 147 *f.*, MARTENS 2003, S. 77 - 83.

zwischen Fällen und Gegenfällen relativ zum Definitionsinteresse, z.B. Definitionskriterien zusammenzustellen, deren Einhaltung die Verständlichkeit zu definierender Begriffe sichert (vgl. Bemerkungen zur Sache). Diese Art der Begriffsanalyse verdeutlicht in der Diskussion konkreter Ausgangsbeispiele den Sinn auch abstrakter Definitionen. Sie ist deshalb besonders geeignet, den Schülern als wichtiges Lernziel Sinn und Notwendigkeit mathematischer Definitionsverfahren zu verdeutlichen.

6 DURCHFÜHRUNG DER UNTERRICHTSREIHE

Der Einheit liegt ein durchgängiger Gedanke zugrunde. Um dem Leser dieser Arbeit einen Eindruck der unterrichtlichen Erarbeitung dieses Gedankengangs zu ermöglichen, sollen Planung und Durchführung aller Stunden[52] wenigstens im Kern dargestellt werden. Die gesamte Einheit umfasst zwölf Unterrichtsstunden[53], die sich grob zu drei Blöcken zusammenfassen lassen. Die erste, die fünfte und die zehnte Stunde[54] der Einheit leiteten diese Blöcke ein bzw. waren Kernstunden der Einheit, sie sollen deshalb ausführlicher besprochen werden. Der besondere Reiz bestand für mich im kontinuierlichen Wechsel (nicht selten auch in einer Stunde) der Reflexionsebenen: Es wird sowohl am Objekt gearbeitet und Mathematik betrieben als auch über diese Tätigkeit - gleichsam auf der Metaebene - philosophisch reflektiert. Diese Konzeption hatte nicht immer den gewünschten Erfolg; im Blick auf die eingangs formulierten Arbeitshypothesen haben sich insbesondere die siebte und die achte Stunde als prinzipiell schwierig erwiesen; deshalb sollen auch diese Stunden ausführlicher analysiert werden.

6.1 Die erste Unterrichtsstunde am Montag, den 16.08.2004

Thema der Stunde: Mikroskopieren mit quaderförmigen Gegenständen

Hauptlernziel: Die Schüler sollen erkennen, dass mathematische Quader nur in Gedanken (Theorie) und nicht in der materiellen Wirklichkeit zu finden sind.

Planung: Diese und die folgende Stunde sollen als Einstieg zum thematischen Kern der gesamten Unterrichtsreihe hinführen: Wahrscheinlich werden Schüler noch nie über den erkenntnistheoretischen Charakter geometrischer Gegenstände nachgedacht haben und beispielsweise nicht zwischen quaderförmigen Alltagsgegenständen und mathematischen Quadern unterscheiden. Hier gilt es deshalb unhinterfragte

[52] Die zugehörigen Stundenraster sind im Anhang zusammengestellt.
[53] Am Donnerstag, den 26.08.2004 fiel der Mathematikunterricht wegen eines Wandertages aus, was jedoch keine weiteren Konsequenzen für den weiteren Verlauf der Einheit hatte.
[54] In der ersten und zehnten Stunde der Einheit waren die Fachleiter Frau Plate und Herr Dr. Heisecke anwesend, in der fünfte Stunde war nur Dr. Heisecke anwesend.

Überzeugungen des (mathematischen) Vorunterrichts aufzubrechen und Schülern die Notwendigkeit einer Prüfung ihrer (mathematischen) Vorurteile und Vorerfahrungen vor Augen zu führen. Um umständliche und sachlogisch komplizierte Überlegungen zu vermeiden und möglichst suggestiv und zugleich überraschend die entscheidende Einsicht "Geometrische Gegenstände sind abstrakt..." zu vermitteln, werde ich die Analogie der "beliebigen Vergrößerung" ausnutzen: Auf der mikroskopischen Ebene scheint es keine idealen geometrischen Formen zu geben; bei beliebiger Vergrößerung bis in den Bereich kleinster Materiebausteine scheint es keine idealen geometrischen Formen zu geben; deshalb ist es naheliegend anzunehmen, dass es in der Wirklichkeit überhaupt keine idealen geometrischen Formen gibt. Die Basis dieses Analogieschlusses sollen die Schüler experimentell am Mikroskop erarbeiten. Der Einsatz des Mikroskops macht es für mich naheliegend, als Einstiegsbeispiel den Quader zu betrachten und nicht etwa einen besonderen Viereckstyp: Räumlich zu sein ist eine Eigenschaft, die der Quader mit allen Gegenständen des Alltags gemeinsam hat; Vierecke sind demgegenüber ebene Figuren, die nicht selbständig sondern nur **an** räumlichen Gebilden realisiert werden können. Diese für Schüler feinsinnigen Unterscheidungen und die sich daran anschließenden begrifflichen und gegenständlichen Unklarheiten (Wie untersucht man an einem räumlichen Gegenstand auf ideale ebene geometrische Formen?) sollen durch die Wahl des Quaders als Einstiegsbeispiel umgangen werden.

Der **Einstieg** erfolgt über einen stillen Impuls: Exemplarisch trennt der Lehrer quaderförmige und nicht-quaderförmige Gegenstände und bittet einzelne Schüler die Sortierung zu vervollständigen, schließlich das Unterscheidungsmerkmal "Quaderförmig" zu benennen und "definierende" Eigenschaften des Quaders zusammenzustellen (wichtig sind hier "Orthogonalität" angrenzender Seiten und "Glattheit" der Seitenflächen und Parallelität der Seitenflächen und gegenüberliegender Seiten. Durch die zunehmende Einbindung der Schüler und den gestik- und mimikreichen Einstieg soll die Schüler motivieren und ihre Aufmerksamkeit bündeln helfen. Im Einstieg sollen das mathematische Vorverständnis und das Alltagsverständnis des Begriffes Quader gegenübergestellt werden. Zur **Provokation und Irritation** der Schüler wird die Frage "Handelt es sich bei den sortierten Gegenständen wirklich um mathematische Quader?" gestellt und ohne weitere Diskussion bzw. Spekulation als Aufgabe der folgenden **Erarbeitungsphase** vorangestellt: Nach dem didaktischen Grundsatz "Vom Konkreten zum Abstrakten"

sollen die Schüler konkrete Gegenstände unter dem Mikroskop untersuchen und feststellen, dass und weshalb es sich nicht um mathematische Quader handelt. Diese Art der Visualisierung eröffnet allen Schülern einen handlungs- und schülerorientierten, suggestiven Zugang zum Hauptlernziel der Stunde. Der Arbeitsauftrag (vgl. Anhang, S. 2, 3) erfordert arbeitsteiliges Vorgehen, er enthält verschiedene praktische und theoretisch diskursive Arbeitsanteile und soll deshalb als Gruppenarbeit inszeniert werden. Der Vergrößerungsfaktor der Mikroskope reicht aus, um nachzuweisen, dass die ausgewählten Gegenstände keine mathematischen Quader sind. Sollten einzelne Arbeitsgruppen dennoch einige Gegenstände als echte Quader bezeichnen, so wird es genügend Widerstand aus anderen Gruppen geben. Das Arbeitsergebnis wird auf Pinwänden gesammelt festgehalten, so dass der radikale Meinungswechsel der Schüler (im Vergleich zur unreflektierten Meinung in der Einstiegsphase) besonders deutlich wird. Der Umgang mit Mikroskopen sollte den Schülern aus dem Biologieunterricht der Orientierungsstufe bekannt sein.
Haben die Schüler erkannt, dass ihre ursprüngliche Sortierung falsch und ihre Einschätzung in das genaue Gegenteil gekippt ist, schließt sich in einer **ersten Vertiefungsphase** die Frage "Wo gibt es den perfekten Quader?" an. Erwartbare Schülerantworten könnten "in der Theorie", "im Kopf", "in Gedanken" o.ä. nennen und so das experimentell erarbeitete Ergebnis verallgemeinern, oder den Gedanken der beliebigen Vergrößerung aufgreifen und vorschlagen im atomaren Bereich zu suchen. Für diesen letzteren Fall habe ich einige Elektronenmikroskopaufnahmen (vgl. Anhang, S. 4) auf Folie vorbreitet, die deutlich zeigen, dass auch auf der Ebene kleinster Bausteine der Materie keine perfekten Körperformen vorzufinden sind. Als Zwischenergebnis wird festgehalten "Der mathematische Quader existiert nur in Gedanken; er ist ein idealer und abstrakter Gegenstand". In einer **zweiten Vertiefungsphase** werde ich durch Aneinanderreihen vieler weiterer Beispiele mathematischer Begriffe (vgl. Anhang, S. 5) die Schüler bewusst "nerven" und provozieren, so dass sie von sich aus das Zwischenergebnis verallgemeinern.

Durchführung: Der Einstieg war tatsächlich motivierend, das Hauptlernziel wurde schneller als erwartet erreicht, deshalb konnte die geplante Hausaufgabe (vgl. 1. Stundenraster und Anhang, S. 6) als weitere Vertiefungsphase angeschlossen werden. Die Schülerbeteiligung war durchgängig sehr hoch; sonst eher zurückhaltende oder schwächere Schüler haben sich aktiv in das Stundengeschehen eingebracht: schon das

Unterrichtsgespräch war deshalb als Lernzielkontrolle ausreichend und hat gezeigt: die wichtigsten Lernziele der Stunde konnten auf allen Leistungsebenen erreicht werden. Besonders auffällig sind die Beiträge von Sören; sie bezeugen eine sehr gute technisch-physikalische Allgemeinbildung und ein hohes logisches Problembewusstsein.

Kritische Bemerkungen zur Planung: 1) Tatsächlich haben die Schüler noch nie zuvor an einem Mikroskop gearbeitet; die wesentlichen Kenntnisse mussten in einem "Schnellkurs" in der Stunde selbst vermittelt werden, was dank der großen Disziplin der Lerngruppe ohne Schwierigkeiten möglich war.

2) Tatsächlich bringen Lars u.a. die Idee auf, im atomaren Bereich nach idealen Strukturen zu suchen; die Beiträge - gerade auch von Sören - zeugen von einer guten physikalischen Allgemeinbildung, die mein Erklärungsniveau der Elektronenmikroskopie deutlich übersteigen - wie weit darf die didaktische Reduktion auf Kosten sachlicher Richtigkeit gehen?

3) Die von mir bewusst kurz gehaltene Provokation sollte eine motivierende Spannung für die Erarbeitungsphase aufbauen. Hier hätte aber die aufklärerische, vorurteilskritische und spekulative Funktion von Philosophie sinnvoll verstärkt werden können; die Provokationsfrage hätte Anlass für ein erstes Abwägen und Diskutieren des Für und Wider in der gesamten Lerngruppe sein können.

Insgesamt war ich mit dem Stundenergebnis sehr zufrieden: Die offen gehaltenen Impulse und die sich anschließenden Unterrichtsgespräche sind durch eine große inhaltliche Vielfalt und ein hohes argumentatives und sprachliches Niveau ausgezeichnet; diese Erfahrung bestätigt mich in meinem Vorhaben, die folgenden Lernziele auch in ihrer sachlogischen Folgerichtigkeit zu erarbeiten, um die Schüler noch stärker in konsequentem logischen Argumentieren und Denken zu üben.

6.2 Die zweite Unterrichtsstunde am Dienstag, den 17.08.2004.

Thema: Das Verwechslungsproblem abstrakter Gegenstände.

Hauptlernziel: Die Schüler sollen die Möglichkeit, abstrakte (geometrische) Gegenstände zu verwechseln, als Problem für eine funktionierende Mathematik erkennen.

Planung: Der **Stundeneinstieg** dient der Sicherung der Vorstundenergebnisse: Am

Beispiel "mathematischer Punkt" (vgl. Anhang, S. 7) sollen die Schüler wesentliche Ergebnisse und Überlegungen der Vorstunde wiederholen.
Das Hauptlernziel der Stunde ist abstrakt und enthält keinen Bezug zur Gedanken- und Lebenswelt der Schüler. Deshalb gebe ich in der **Problematisierungsphase** der Lerngruppe das entsprechende Verwechslungsproblem durch eine motivierende und in ihrer Hauptaussage leicht zu entschlüsselnde Karikatur vor (vgl. Anhang, S. 8); sie zeigt zwei Comicfiguren, die an verschiedene Gegenstände denken, sie aber mit dem gleichen Begriff Quader kennzeichnen. **Erarbeitungsphase I**: Um die Bedeutung des Problems herauszustellen, sollen die Schüler im Gedankenexperiment "Was wäre, wenn es in der Mathematik tatsächlich solche Verwechslungen gäbe?" ein contrafaktisches Horrorszenario der Mathematik entwerfen. Das Ergebnis der **Präsentationsphase** wird auf das Problem "Wie schaffen es die Mathematiker, über die gleichen Gegenstände zu reden, ohne an verschiedene Dinge zu denken?" zugespitzt. In der anschließenden **Erarbeitungsphase II** sollen die Schüler selber Lösungsvorschläge für die gestellte Aufgabe formulieren. Erwartbare Lösungsvorschläge könnten die Idee der Sprachnormierung enthalten oder auf das exemplarische Einüben von Begriffen verweisen. Gerade weil philosophische Einsichten dieser Art nur langsam verinnerlicht werden, ist dieser "Rückschritt" hinter die Vorstundenergebnisse immer noch naheliegend und kann dann im Sinn einer Lernzielkontrolle kritisch von der gesamten Lerngruppe diskutiert und ausdifferenziert werden. In der **Auswertungsphase** werden die wesentlichen Lösungsvorschläge zusammengestellt, diskutiert und offiziell als "Forschungsgrundlage" im Sinne einer größtmöglichen Schülerzentrierung dem Folgeunterricht zugrundegelegt.
Durchführung: In der Einstiegsphase werden sämtliche Ergebnisse ausführlicher als geplant diskutiert; viele Gedanken, Begriffe und Fragen werden eingebracht. Interessante Höhepunkte des Gesprächs: Sarah fordert eine "Definition des Punktes, um sich besser verständigen zu können"; es wird - angeregt durch Henning - darüber spekuliert, wie viel Punkte eine Fläche hat, wie viel Fläche ein Punkt hat und ob "Punkte nicht als Ecken definiert werden könnten", schließlich führt Glenns Frage, "was macht den konkreten Quader zum Quader?" in erkenntnistheoretische Spekulationen, in denen philosophiegeschichtlich prominente Positionen vorformuliert werden: Phillip, Nils und Sören glauben - platonistisch, dass der konkrete Quader durch "vereinfachen" und "oberflächliches Betrachten" aus dem "theoretischen Quader" hervorgeht, Hannes u.v.a. glauben - aristotelisch, dass vom konkreten Quader ausgehend der theoretische

Quader gedacht wird. Die Diskussion zeigt deutlich, dass abstrakte (philosophische) Einsichten nicht nur suggestiv als bloßes Faktum - auswendig - gelernt, sondern durch Gedankenaustausch und Diskussion verinnerlicht werden müssen, um gedanklich frei verfügbar zu sein.
Formulierungen wie "jeder dächte sich seinen eigenen Quader", "dann zerbricht die Mathematik-Theorie", "Chaos bricht aus" dokumentieren auch für die Phase des Gedankenexperiments das hohe Gesprächsniveau der Lerngruppe. Das Planungsziel wurde in dieser Stunde nicht erreicht; als echte Vertiefung und Sicherung der Vorstundenergebnisse war sie aber dennoch von großer Bedeutung. Das hohe inhaltliche Niveau und Interesse der Lerngruppe auch in längeren Gesprächsphasen legt es für mich nahe, der Lerngruppe noch mehr begründungstheoretische Überlegungen zuzumuten, d.h. den Gedankengang der Unterrichtsreihe selbst für die Schüler als "logisch zwingend" erscheinen zu lassen und Spekulations- und Diskussionsphasen in Gruppen- und Unterrichtsgespräch mehr Zeit einzuräumen.

6.3. Die dritte Unterrichtsstunde am Donnerstag, den 19.08.2004.

Thema: Lösungssuche für das Verwechslungsproblem mathematischer Gegenstände.

Hauptlernziel: Die Schüler sollen Lösungsstrategien für das Verwechslungsproblem formulieren und die Idee der Begriffsnormierung bzw. Definition als zielführend erkennen.

Planung: Schon in dieser Stunde sollte die Euphorie der Vorstundenerfahrungen gedämpft werden. Ihr tatsächlicher Verlauf hat zu einer ersten Änderung meiner Methodenplanung geführt. Intendiert war eine Stunde, in der sich mathematisches Tun und philosophische Reflexion darauf für die Schüler durchschaubar und folgerichtig abwechseln sollten. Im Sinne eines möglichst denkkonsequenten Stundenverlaufs soll der **Einstieg** den auf das Verwechslungsproblem hinführenden Gedankengang rekonstruieren; er wird anschließend als "**Problem"** zusammengefasst und auf einem Arbeitsblatt (vgl. Anhang, S. 8) festgehalten. In der nun folgenden **Erarbeitungsphase** sollen die Schüler wieder in Partnerarbeit mögliche Lösungsvorschläge für das Problem **selber** formulieren und diskutieren. In der anschließenden **Auswertung** werden die Vorschläge an der Tafel gesammelt, diskutiert und der sachlogischen Wichtigkeit nach

geordnet und als Vermutungen unter das Problem auf dem Arbeitsblatt notiert. Die Schüler erkennen die Notwendigkeit, ihre Vermutungen einer Prüfung zu unterziehen; der Lehrer gibt als weiteres Unterrichtsziel die genaue Untersuchung von Definitionsverfahren am Beispielfeld Vierecke vor. In der folgenden **zweiten Erarbeitungsphase** sollen die Schüler die Aufgabe "Erkläre so genau wie möglich, was ein Rechteck ist!" in Gruppen bearbeiten. In dieser Phase sollen am mathematisch vorerschlossenen Objekt "Rechteck" erste Erfahrungen im Definieren gesammelt und anschließend reflektiert werden.
In der **zweiten Auswertungsphase** werden die Lösungen selber diskutiert und auf Richtigkeit, Vollständigkeit und Unabhängigkeit untersucht, um dann in einem letzten Schritt gleichsam metakognitiv die Vorgehensweise zu beschreiben und den wesentlichen Sinn mathematischer Definitionen zu benennen. Als **Sicherung** wird ein Merkhefteintrag vorgenommen und die Definition der Definition eingetragen.

Durchführung: Diese Stunde hat sich in der Durchführung als schwierig erwiesen: die Beteiligung ging deutlich zurück; es traten zwar keine Disziplinschwierigkeiten auf, aber - von einigen Ausnahmen abgesehen - wirkten viele Schüler angestrengt oder abwesend. Im Vergleich zu den Vorstunden hat die Konzentration und Spannkraft nachgelassen und eine latente Unruhe beherrscht den Unterricht.
Nicht nur Mathematik zu betreiben und sich mit Verfahren mathematischer Begriffsbildung auseinander zu setzen, sondern zugleich in einem permanenten Wechsel zwischen mathematisch inhaltlicher und philosophischer (metareflexiver) Betrachtungsweise dieses Tun selber zu reflektieren ist für Schüler dieser Altersgruppe eine ungewohnte Denkanstrengung - so verstehe ich die Erfahrungen dieser Unterrichtsstunde. Um die Schüler nicht durch permanente Überforderung zu demotivieren, werde ich 1. die folgenden Stunden thematisch einheitlicher mit einem eher mathematischem oder einem eher philosophischen Schwerpunkt planen und 2. im Sinne des didaktischen Credos "Vom Konkreten zum Abstrakten; vom Besonderen zum Allgemeinen" die Stundenziele auch durch suggestives Visualisieren und Konkretisieren und nicht ausschließlich argumentativ erreichbar machen. Das durchgängige Verargumentieren aller Unterrichtsschritte überfordert die Schüler, erscheint ihnen als zu kleinschrittig und lässt sie Wesentliches aus dem Blick verlieren.

6.4 Die vierte Unterrichtsstunde am Freitag, den 20.08.2004.

Thema: Wie findet man Definitionen?

Hauptlernziel: Die Schüler sollen den Verfahrenskern zur Formulierung von Definitionen entdecken und formulieren.

Planung: Zum **Stundeneinstieg** sollen die Schüler an einem **konkreten** außermathematischen Beispiel (vgl. Anhang, S. 10) eine eigene Definition erstellen, indem sie zuerst eine Sortierung selber vervollständigen, dann die unterscheidenden Merkmale in einer Definition zusammenstellen, um schließlich ihre Vorgehensweise **abstrakt** zu reflektieren und den allgemeinen Verfahrenskern herauszustellen. In einer **ersten Sicherung** werden die Vorschläge im Unterrichtsgespräch zu "Merkmalen von Definitionen" gebündelt, normiert und auf das Arbeitsblatt übertragen.
In einer anschließenden **Anwendungsphase** sollen die erarbeiteten Erkenntnisse auf ein mathematisches Beispiel angewendet werden: Analog zum Einstiegsbeispiel soll jetzt für das Quadrat (vgl. Anhang, S. 11) eine möglichst umfassende Liste kennzeichnender Merkmale aufgestellt werden. Das Quadrat bietet sich für diese Phase an, weil es unter den Vierecken den höchsten "Symmetriegrad" hat und deshalb - im Vergleich zu anderen Viereckstypen - die meisten geometrischen Eigenschaften, die überhaupt zur Beschreibung von Vierecken herangezogen werden können, auf sich vereint. Hier können alle Schüler ihrem Leistungsniveau entsprechend Merkmale unterschiedlichster Raffinesse zusammenstellen (motivierend). In der anschließenden **Sicherungsphase** werden die vorgeschlagenen Merkmale zusammengetragen und an einer Beispielfigur visualisiert.

Durchführung: Tatsächlich war die Schülerbeteiligung wieder deutlich höher und es herrschte eine sehr entspannte aber konzentrierte Arbeitsstimmung: die "Schlonze" motivierten durch ihre Graffity-Ästhetik und ihren Rätselcharakter; sie waren deshalb als außermathematisches Einstiegsbeispiel besonders geeignet. Das "Quadrat" ermöglichte eine binnendifferenzierende Bearbeitungsvielfalt (die von Schülern zusammengetragenen Merkmalen reichten von einfachen Winkelkriterien bis zu Behauptungen über In- und Umkreisbesonderheiten des Quadrats), die allen Schülern Erfolgserlebnisse ermöglichte. Den positiven Stundenverlauf führe ich zurück auf einen häufigeren Phasenwechsel, die zeitliche Kürzung von Erarbeitungsphasen mit hohen

Reflexions- und Argumentationsanteilen und eine stärkere Handlungsorientierung der Stunde durch schülernahe Beispiele als konkretem Anlass für anschließende abstrakte Reflexionen. In den Auswertungsphasen zeigt sich immer wieder ein Zusammenhang zwischen einem präzisen und reichhaltigen Ausdrucksvermögen und der mathematischen Begabung einzelner Schüler: Viele merkheftfähige Gesprächsbeiträge stammen von den m.E. mathematisch begabtesten Schülern der Lerngruppe (Nils, Philipp, Hannes, Sarah, Henning und Sören).

6.5 Die fünfte Unterrichtsstunde am Montag, den 23.08.2004.

Thema: Steckbriefe für Vierecke.

Hauptlernziel: Die Schüler sollen ihr geometrisches Vorstellungsvermögen trainieren und ihr Wissen über besondere Vierecke vertiefen und anwenden.

Planung: In den nächsten Stunden sollen die Schüler die Notwendigkeit einsehen, die Äquivalenz von Definitionen ohne anschauliche Argumente zu beweisen. Um möglichst viele Schüler zur Beschäftigung mit diesen abstrakten und "trockenen" Fragen zu motivieren, sollen sie die Beweisnotwendigkeit selbst entdecken und formulieren. In diesem Sinn stellen die Schüler zunächst nicht Definitionen, d.h. definierende Merkmalskataloge von Vierecken her, sondern sie erstellen Steckbriefe, die als Rätsel von ihren Mitschülern zu lösen sind. Dieser Zugriff soll motivieren und anregen aus einer begrenzten Merkmalsliste (ausgewählt aus den besprochenen Merkmalen der Vorstunde) eine möglichst raffinierte und schwer zu erratende Vierecksdefinition zu erstellen: Auf diese Weise werden verschiedene Steckbriefe für gleiche Viereckstypen erzeugt (sollte das wider Erwarten nicht der Fall sein, werde ich weitere Steckbriefe vorbereitet haben); durch den Vorgang des Ver- und Entschlüsselns der Vierecksteckbriefe üben die Schüler ihr geometrisches Vorstellungsvermögen. Aus einem engen und in der Vorstunde bereits erarbeiteten Katalog dürfen bis zu fünf Merkmale in einen Steckbrief aufgenommen werden. Die Reduktion der Komplexität soll Überforderungen vermeiden; zugleich sind aber auch raffiniertere Merkmale in den Katalog aufgenommen, um eine leistungsdifferenzierende und phantasiebefördernde Bearbeitungsvielfalt zu ermöglichen. Als Anschauungsstütze sind Holzstäbe, Stifte und an der Pinwand aufgehängte Schablonen typischer Vierecke (vgl. Anhang, S. 12)

zugelassen: mit ihrer Hilfe können nicht nur Diagonaleigenschaften von Viereckstypen nachgestellt und visualisiert werden; das ermöglicht auch Schülern mit schwächerer geometrischer Intuition ein Nachprüfen ihrer Steckbriefeigenschaften. Der **Einstieg** soll möglichst verblüffend und überraschend sein; er soll die Aufmerksamkeit direkt auf das Lösen von Vierecksrätseln lenken und den Schülern ein Beispiel für Form und Konzeption der Steckbriefe liefern: Deswegen werde ich den nicht zu leicht verschlüsselten Steckbrief eines symmetrischen Trapezes (vgl. Anhang, S. 12) mit dem Ausruf "Wanted - dead or alife!" aufhängen, die Schüler wie erwachsene Detektive ansprechen und zur Lösung des Rätsels mit den bereitgestellten Hilfsmitteln auffordern.
In der **ersten Erarbeitungsphase** sollen die Schüler in Gruppen je zwei Steckbriefe mit maximal fünf Merkmalen erstellen. Das aufwendige und komplexe Material macht einen zweiteiligen Arbeitsauftrag (vgl. Anhang, S. 13, 14) notwendig. Den leistungsstärkeren Gruppen wird als schwierigeres Beispiel der symmetrische Drachen zugemutet. Nach dem Erstellen der Steckbriefe sollen die Schüler gruppenweise im Uhrzeigersinn zu ihrer Nachbargruppe gehen, deren Steckbrief entschlüsseln und einen verdeckten Lösungstipp auf dem Gruppentisch hinterlassen; so kann ich mich auch in dieser **zweiten Erarbeitungsphase** (und Auswertungsphase) aus dem Unterrichtsgeschehen zurücknehmen und muss nur auf die Einhaltung der Zeitvorgaben achten. Durch die große Disziplin der Lerngruppe ist kein "Ausbruch" in dieser sehr offenen Unterrichtsphase zu befürchten.
In der **Schlussphase** werden nur solche Steckbriefplakate an die Pinwand gehängt, zu denen konkurrierende Lösungsvorschläge eingebracht wurden. Im Blick auf die Hauptlernziele der Stunden sollen zunächst nur die offensichtlich falsch entschlüsselten Steckbriefe verbessert werden. Zur **Festigung und Vertiefung** soll die Viereckstabelle (vgl. Anhang, S.16) als Hausaufgabe ausgefüllt werden.

Durchführung: Tatsächlich hatte der Einstieg die gewünschte Wirkung: belustigt und ein wenig verunsichert durch die Anrede "Sie" führte das Rätsel zur sofortigen Konzentration auf das mathematische Problem. Durch die gegebenen Hilfsmittel können auch sonst schwächere Schüler (gerade im Einstieg: Glenn) aktiv an der Problemlösung teilnehmen. In der Diskussion einzelner Steckbriefkriterien führt Philipp sogar einen indirekten Beweis durch - ein Indiz für seine überdurchschnittliche mathematische Begabung. In der Erarbeitungsphase waren die Schüler durch diesen Einstieg und das aufwendige und ästhetisch ansprechende Material (Pappplakate, gedruckte Merkmalskarten,...) hochmotiviert. Auffällig war auch, mit welcher Selbstverständlichkeit die im Einstieg verwendeten Pappschablonen und Stäbe als Hilfe von allen Schülern einbezogen wurden. Leider führte der Auftrag, zwei Steckbriefe pro Gruppe zu erstellen, in einigen Fällen zur Spaltung der Gruppe in zwei Paare, die je für sich einen Steckbrief bearbeiteten.

Die Zweite Erarbeitungsphase verlief nicht so geordnet wie gewünscht: Diese Art des Rotationsverfahrens wurde in dieser Lerngruppe das erste mal eingesetzt, der Klassenraum ist für ein solches Unternehmen doch relativ eng, wesentlich waren die unterschiedliche Leistungsstärke und Lösungsgeschwindigkeit einzelner Gruppen, die dann zu Stationenstauungen geführt haben. Interessanterweise gab es nur in einem viertel aller bearbeiteten Steckbriefe konkurrierende Lösungsvorschläge, deren Besprechung aus Zeitmangel aber in die nächste Stunde verlegt werden musste (Beispiele für Schülerarbeiten im Anhang, S. 15).

6.6 Die sechste Unterrichtsstunde am Dienstag, den 24.08.2004.

Thema: Definitionsvielfalt bei Vierecken.

Hauptlernziel: Die Schüler sollen erkennen, dass es vielfältige Definitionsmöglichkeiten einzelner Viereckstypen gibt.

Planung: In dieser Stunde ist die prinzipielle Definitionsvielfalt bei Vierecken zu problematisieren. **Einstieg**: Nach der Hausaufgabenbesprechung und der Auflösung konkurrierend gelöster Vierecksrätsel werden sämtliche Plakate nach Viereckstypen geordnet an die Klassenzimmerwände angeklebt, so dass bei jedem Viereckstyp mindestens zwei verschiedene Steckbriefe zu finden sind. In der **Problematisierungsphase** frage ich nach Auffälligkeiten, die sich den Schülern beim betrachten der Plakate ergeben: Hier sollen die Schüler erkennen, dass **alle** Viereckstypen auf **je** sehr verschiedene Weisen definiert werden können. Diese Einsicht relativ zu den Vorstundenergebnissen als klärungsbedürftiges Problem zu durchschauen, setzt eine hohe Begründungsempfindlichkeit und tiefes philosophisches Problembewusstsein voraus, für das Schülern dieser Altersstufe aber erst sensibilisiert werden müssen; deshalb wird diese Phase als gelenktes Unterrichtsgespräch und nicht etwa offener im Rahmen einer Gruppendiskussion geführt. Im Sinn dieser

Problemsensibilisierung und der Einübung konsequenten Argumentierens wie auch einer Lernzielkontrolle des erreichten Reflexionsniveaus sollen die Schüler in der anschließenden **Erarbeitungsphase** selber Fragen formulieren, die sich im Anschluss an dieses Ergebnis für sie stellen und die sie als nächstes untersuchen würden: Die jeweilige Gruppenfrage wird auf einem Plakat festgehalten und an der Pinwand befestigt, dadurch kann das spätere Sortieren der Fragen nach sachlogischer Wichtigkeit leichter organisiert werden. In der **Präsentationsphase** soll jede Gruppe Ihre Frage kurz vorstellen, im Anschluss sollen die Fragen nach Wichtigkeit geordnet werden:

Durchführung: Die Besprechung der Hausaufgaben und das Lösen der verbleibenden Vierecksrätsel verlief erwartungsgemäß reibungslos: selbst schwächere Schüler konnten die Hausaufgaben im wesentlichen fehlerfrei lösen, aufgetretene Fehler wurden in der Lerngruppendiskussion schnell behoben: in dieser Phase musste ich nur das Gespräch moderieren, Erklärungen, Kommentare und Hilfestellungen wurden aus der Lerngruppe selber entwickelt. Überraschenderweise finden immer öfter auch sonst zurückhaltende Schüler den Mut vor der Klasse - als Kurzvortrag - eines der verbleibenden Vierecksrätsel zu lösen.
Schon der schlichte und offene Impuls "Was fällt Euch auf?" wirkte für die Schüler augenöffnend: verblüfft wird die Vielzahl verschiedenster Definitionen eines Viereckstyps zur Kenntnis genommen. In der folgenden Diskussionsphase sind das Engagement und das Niveau der Überlegungen in vielen Gruppen so anhaltend hoch, dass ich mich entschließe, die Bearbeitungszeit etwas zu verlängern. Die sich anschließende Präsentationsphase hielt einige Überraschungen für mich bereit (vgl. Anhang, S. 17): Nur zwei der sieben Gruppen (Sarah, Paloma, Anthea, Janina, Shervin, Michel, Katharina und Alina) knüpften explizit an die Vorstunden der Reihe an, erkannten in der Plakatvielfalt das Verwechslungsproblem abstrakter Gegenstände wieder und fragten nach einer Möglichkeit, aus diesen Definitionen eine "beste" auszuwählen. Da aber sämtliche gestellten Fragen das Verständnis des Themas vertiefen und fördern können beschließe ich, diese Fragen in die weitere Unterrichtsplanung einzubeziehen und in den kommenden Stunden für die Schüler nachvollziehbar "abzuarbeiten" (beispielsweise für die Fragen 3 und 4 im Anhang, S.17 vgl. die Aufgaben 21, 22 zur Vorbereitung der Klassenarbeit im Anhang, S. 29, 30).

6.7 Die siebte und achte Unterrichtsstunde am Freitag, den 27.08.2004 und am

Montag, den 30.08.2004.

Thema: Äquivalente Definitionen.

Hauptlernziel: Die Schüler sollen am Beispiel des Quadrats die Notwendigkeit erkennen, die Äquivalenz von Definitionen zu beweisen.

Planung: Die folgenden zwei Stunden waren die unterrichtsmethodisch schwierigsten Stunden der gesamten Einheit. Die "Doppelstunde" war als Erarbeitung-der-Theorie- und Anwendung-der-Theorie-Stunden geplant: Aus der Problematisierung der Definitionsvielfalt für das Quadrat (in der Vorstunde) sollen die Schüler in der **ersten Stunde** erkennen, dass man die Äquivalenz von Definitionen theoretisch - also ohne Rückgriff auf Motive der Anschauung - und in zwei Schritten (Beweis der hinreichenden und Beweis der notwendigen Bedingung) beweisen muss. Diese metatheoretische Einsicht soll in der kritischen Reflexion auf und im unmittelbaren Anschluss an die bisher gewonnenen Erkenntnisse und Schülerarbeiten vermittelt werden (um den Schülern ein durchgängiges Beispiel konsequenten und folgerichtigen Fragens und Denkens anzubieten). Dazu müssen die Schüler von ihrer intuitiven anschaulichen Vorurteilen abstrahieren und dürfen sich beim Beweis der Äquivalenzbehauptung nicht von ihrer Anschauung leiten lassen; nur dann können sie verstehen, dass für Äquivalenzbehauptungen ein Beweis überhaupt erforderlich ist und dass dieser Beweis aus zwei Teilen bestehen muss. Nur wenige Schüler werden die bisherigen Reiheninhalte so verinnerlicht haben, dass ihnen diese Abstraktionsleistung leicht fallen wird; der metatheoretische Charakter und die isolierte Merksatzform des Stundenziels erschweren also einen offenen, entdeckenden Zugang zum Stundenziel: eine enge Lenkung in einem in frontaler Lehrer-Regie geführten Unterrichtsgespräch scheint deshalb erforderlich. In der **zweiten Stunde** sollen die Schüler die metatheoretischen Erkenntnisse anwenden und einen Äquivalenzbeweises (zweier Quadratdefinitionen) selbständig erarbeiten; an diesem Anwendungsbeispiel soll die zentrale Bedeutung die Trennung zwischen vorausgesetzten Eigenschaften und abgeleiteten bzw. nicht per definitionem gegebenen Eigenschaften verdeutlicht werden. Dieser zweite Schritt kann aufgrund der Vorkenntnisse der Klasse (vgl. Bemerkungen zu Lerngeschichte und curricularem Umfeld) (und ihrer Reaktivierung in der Hausaufgabe) wesentlich schülerzentrierter durchgeführt werden: die Erarbeitungsphase wird in arbeitsteilig organisierten Gruppen (jede Gruppe bearbeitet eine Richtung des Beweises) durchgeführt, die ihre Ergebnisse in der Präsentationsphase als Schülervorträge an einer von mir entsprechend vorbereiteten Tafel vorstellen. Erst in der Auswertungs- und Sicherungsphase, in der die Schülervorträge zu einem merkheftfähigen Beweis zusammengefasst werden, wird eine stärkere Lenkung im Unterrichtsgespräch erforderlich sein.

Durchführung: Der **Einstieg in die erste Stunde** knüpfte an die Schülerfragen der Vorstunde (vgl. Anhang, S. 17) an und war rein innerthematisch motiviert. Dennoch war die Phase von einer starken Schülerbeteiligung und einer dichten Lernatmosphäre geprägt: von Schülerprodukten auszugehen und diese - für Schüler nachvollziehbar - als Planungsgrundlage für den weiteren Unterricht zu nutzen, erweist sich immer wieder als sehr schülermotivierend.

In der sich anschließenden **Erarbeitungsphase** nahm die Beteiligung schnell ab und ich musste das Gespräch an den inhaltlich wesentlichen Stellen stärker lenken als erwartet: Für die Schüler ergab sich aus der Vielzahl möglicher Quadratdefinitionen die Notwendigkeit den Begriff "Definition" durch weitere Forderungen zu verschärfen und das Konzept einer "perfekten Definition" zu entwickeln. Beispielsweise sollten Kriterien wie "kleine Merkmalsliste" und "einfache Merkmale" zur Definition der Definition hinzugefügt werden. Ich habe unterschätzt wie überzeugend das vermeintliche Ideal einer "perfekten Definition", der Glaube an die Möglichkeit einer eineindeutigen Zuordnung zwischen Definition und definiertem Objekt bei Schülern ist. Vor diesem Ideal erscheint das Zulassen vielfältiger Definitionen relativ zu entsprechenden Äquivalenzbeweisen als falsche Bescheidenheit. Der Glaube an die Möglichkeit "perfekter Definitionen" macht zugleich schwer verständlich, weshalb Äquivalenzbehauptungen durch zwei Schritte (hinreichend und notwendig) bewiesen werden müssen.

Auch die **zweite Stunde** hat sich als schwierig herausgestellt: Das Gedankenprotokoll zum **Stundeneinstieg**, d.h. die Rekonstruktion des Gedankengangs der Vorstunde, wird nun schon als Ritual wahrgenommen und es gelingt auch schwächeren Schülern (in dieser Stunde war es Paloma) immer besser, die wesentlichen einzelne Stundeninhalte in ihrem Zusammenhang und ihrer Entwicklung korrekt darzustellen. Das werte ich als einen wichtigen Erfolg dieser Unterrichtsreihe. Auch die Wiederholung der Kongruenzsätze und ihrer Beweisanwendungen muss als erfolgreich bewertet werden, was die positive Einschätzung des Lernverhaltens der Klasse nur bestätigt.

Dennoch ist das Konzept der Stunde nicht aufgegangen: In der Gruppenarbeitsphase, die wie gewohnt mit großem Engagement und intensiven Diskussionen verläuft, wird schnell deutlich, dass die Schüler überfordert waren: Zwar gibt es eine große Vielfalt an Beweis-Ideen, aber das Bewusstsein für die Trennung zwischen Voraussetzung, Behauptung und weiteren Eigenschaften ist nicht hinreichend ausgeprägt, so dass die erforderliche Argumentation nicht mit der notwendigen Gründlichkeit durchgeführt wird. Letztlich wurde der Beweis in einem langen Unterrichtsgespräch geführt unter der Beteiligung von schließlich nur wenigen - eben den ohnehin leistungsstarken Schülern der Klasse (vgl. Anhang, S. 18). Es ist nur bezeichnend für das ausgezeichnete Lernverhalten der Klasse, dass auch in dieser Phase keine Unruhe ausbricht, sondern mit echtem Erkenntnisinteresse - angezeigt durch die vielen Verständnis- und Rückfragen - das Geschehen verfolgt wird.

Alternativ zur tatsächlichen Stundenplanung und Durchführung wäre eine wesentlich schülerzentriertere Gestaltung der zwei Stunden möglich gewesen: In der ersten Stunde lösen (arbeitsteilig und in Partnerarbeit) die Schüler (vier) verschiedene Beweispuzzle, die zu einer Äquivalenzbehauptung und einer nicht umkehrbaren Implikation gehören. Zur Lösung des Puzzles ist die logische Ordnung der einzelnen Gedankenschritte und damit eine korrekte Trennung zwischen Voraussetzung und Behauptung erforderlich. Das Verhältnis zwischen Behauptung und ihrer Umkehrung kann an diesen Beispielen ebenfalls problematisiert werden. In einem nächsten Schritt wäre den Schülern auf der Grundlage der Vorstundenergebnisse zu verdeutlichen, dass ein Beweis nicht nur möglich ist, sondern auch unumgänglich. Dieses Alternativkonzeption der zwei Stunden unterbräche zwar die durchgängige und unmittelbare Folgerichtigkeit intendierende Reflexionskette im Reihenganzen, verspräche aber im Sinne eines radikaleren "vom Konkreten zum Abstrakten" einen schülernahen Zugang zum eigentlichen Stundenziel.

6.8 Die neunte Unterrichtsstunde am Dienstag, den 30.08.2004.

Thema: Merkmale guter Definitionen.

Hauptlernziel: Die Schüler sollen eine Merkmalsliste für "gute (perfekte) Definitionen" erstellen.

Aufgrund vergleichbarer Hauptlernziele lege ich dieser Stunde im wesentlichen das Konzept der vierten Reihenstunde vom Freitag, den 20.08.2004 zugrunde. Wie erwartet verlief diese Stunde erfreulich planungsgemäß; sie soll deshalb nicht eigens besprochen werden (vgl. Anhang, S. 19, 20).

6.9 Die zehnte Unterrichtsstunde am Mittwoch, den 31.08.2004.

Thema: Definitionszirkel in mathematischen Lexika.

Hauptlernziele: Die Schüler erkennen am Beispiel des Begriffs "Quadrat" die Definitions-Zirkularität bzw. den Definitionsabbruch in einem mathematischen Schülerlexikon.

Planung: In dieser Stunde sollen die Schüler ein abstraktes und seinem Potential nach hoch mathematikkritisches Lernziel erreichen: die Schüler sollen im Umgang mit einem schülergerechten Fachlexikon erfahren und erkennen, dass es in der Mathematik zirkuläre Definitionen gibt, in denen die erklärenden Begriffe schon ein Verständnis des erst zu definierenden Begriffs voraussetzen.
Die Schüler erfahren auf diese Weise, wie sie von Lexikoneintrag zu Lexikoneintrag durchgereicht werden, ohne auf ein absehbares Fundament geometrischer (Grund-) Begriffe zu stoßen. Im Gegenteil: Die Zahl der klärungsbedürftigen geometrischen Fachwörter nimmt rasch zu, obwohl doch die auftauchenden Begriffe geometrisch immer "einfacher" zu werden scheinen. Schließlich werden die Definitionszirkel immer offensichtlicher, wenn die Erklärung auch der "einfachsten" Begriffe Punkt, Gerade, Ebene nicht unabhängig voneinander und ohne zusätzliche Relationen angegeben werden kann.
Die Schüler sollen mit Hilfe eines Mathematik-Lexikons[55] den Begriff "Quadrat" definieren, ohne auf geometrisches Fachvokabular zurückzugreifen (vgl. Anhang, S. 21). Gerade das "Quadrat" lässt verschiedene Recherchewege offen, die aber alle schnell in die gebetsmühlenartigen Begriffskreisläufe einmünden und so den Schülern die Unlösbarkeit der gestellten Aufgabe gleichsam einhämmern. Spätestens das Suchprotokoll, das die recherchierten Begriffe in der jeweiligen Suchreihenfolge

[55] Es handelte sich um das Lexikon SCHÜLERDUDEN MATHEMATIK I.

enthält, wird durch die sich wiederholenden Begriffseinträge zur augenöffnenden Visualisierung der Begriffszirkel. Dass diese Zirkel in einem Fachbuch für Mathematik enthalten sind, unterstreicht dabei nur die Problematik zirkulärer Definitionen in der Mathematik. Aus dem Vorunterricht weiß ich, dass sämtliche Schüler Erfahrungen im Umgang mit Lexika haben. Nur die Erklärungen der Grundbegriffe Punkt, Gerade und Ebene sind als axiomatische Bausteine gegeben und etwas schwieriger nachzuvollziehen; insgesamt ermöglicht die Aufgabenstellung allen Schülern leistungsindividuelle Zugänge zum Thema. Das Recherchieren, dokumentieren und Erstellen von Plakaten lässt sich am besten arbeitsteilig organisieren, so dass die Erarbeitungsphase als Gruppenarbeit durchgeführt wird. Der Einstieg soll durch Verfremdung das Problem verdeutlichen.

Um eine sachorientierte Auseinandersetzung zu ermöglichen, müssen die Affekte einer eventuell als frustrierend erlebten Lexikonarbeit abgefangen und thematisiert werden; das geschieht zu Beginn der **Auswertungsphase**. Um bei den Schülern den Eindruck einer im Prinzip vollständigen und repräsentativen Bilanzierung mathematischer Definitionsverfahren zu erzeugen, wird das Mathematik-Lexikon als Fachautorität eingesetzt und die am Ende der Gruppenarbeitsphase nicht weiter lexikalisch zurückverfolgten Begriffe im Plenum gemeinsam analysiert (auch im Sinn einer zusätzlichen Sicherung und Festigung). Eine auch nur ansatzweise gründliche Begriffsrecherche wird auf die Begriffe Punkt, Gerade und Ebene zurückführen, die als Grundbegriffe der Geometrie allen anderen Figur und Beziehungsbegriffen zugrunde liegen. Ich werde dazu in einer weiteren **Vertiefungsphase** die Pinwandliste der noch klärungsbedürftigen Begriffe aufgreifen, um möglichst schülernah, nämlich im Ausgang von ihren Ergebnissen, zu zeigen, dass die Analyse sämtlicher Pinwandbegriffe auf die Begriffe Punkt, Gerade und Ebene zurückführt. Anschließend werde ich eine Folienkopie der Lexikoneinträge dieser Begriffe auflegen und im Sinne einer zielgerechten Reduktion inhaltlicher Komplexität eine schülernahe Formulierung dieser Einträge vorgeben; auf diese Weise werden schon im Vorfeld Einwände ausgeräumt, die den Zirkelnachweis als bloß "schniedergemacht" zurückweisen, entlarven und verharmlosen wollen.

Durchführung: Die Vertiefungsphase konnte aus Zeitmangel nicht mehr durchgeführt werden. Dafür können zwei Planungsschwächen verantwortlich gemacht werden: 1. Das Einstiegsbeispiel hätte stärker problematisiert werden müssen, um Schülern die Schwierigkeiten einer radikal fachwortfreien Verständigung zu verdeutlichen. 2. Die

Grundfigur des Begriffsbaums hätte durch ein Beispiel (ob im Einstieg oder im Arbeitsauftrag) visualisiert werden müssen. Dadurch wäre der Arbeitsauftrag für alle Schüler klarer und die Gruppenarbeitsphase schneller abzuschließen gewesen. Dennoch ist das Stundenziel erreicht worden: Schon in der Erarbeitungsphase treten die erwarteten und erwünschten Affekte bei den Schülern ein. In der ersten Auswertungsphase werden die entdeckten Begriffszirkel von unterschiedlichen Schülern auf je verschiedenem Kompetenzniveau benannt. Die Schülerplakate (vgl. Anhang, S. 22 - 24) lassen sich in zwei Gruppen einteilen: einige Plakate enthalten ausgefeilte Begriffsbäume und spiegeln den Versuch, allein definitorisch die gestellte Aufgabe (eine fachwortfreie Definition für "Quadrat" aufzustellen) zu lösen, andere Plakate haben diese Aufgabe durch Zeichnungen und mit Hilfe der Umgangssprache zu lösen versucht. Auch wenn einige Plakate nicht dem intendierten Arbeitsauftrag gefolgt sind, so ist die erzeugte Bearbeitungsvielfalt doch nur ein Spiegel für die grundlagentheoretische Problematik mathematischer Definitionsverfahren.

6.11 Die elfte Unterrichtsstunde am 02.09.2004.

Thema: Das Problem mathematischer Definitionszirkel.

Hauptlernziel: Die Schüler sollen Definitionszirkel als Problem für eine funktionierende Mathematik erkennen.

Planung: Als **Einstieg** wird ein Wortspiel analysiert (vgl. Anhang, S. 25), das in einen Erklärungszirkel einmündet; es soll die Vorstundenergebnisse sichern und zur theoretischen Auseinandersetzung mit Definitionszirkeln unter der allgemeinen Frage "Was sind perfekte Definitionen" motivieren. In der **Erarbeitungsphase** sollen die Schüler durch ein Gedankenexperiment kontrastierend die Katastrophe für eine Mathematik ausmalen, in der nur KLIKLAGLA-Begriffe enthalten sind und sich so der Bedeutung des Zirkelverbots für die Mathematik bewusst werden. Im letzten Schritt der Stunde soll das Ergebnis des Gedankenexperiments verstärkt und bestätigt werden, indem gerade für die geometrischen Grundbegriffe Punkt, Gerade, Ebene der Zirkelnachweis erbracht wird (vgl. Anhang, S. 26, 27). Das Stundenfazit soll den kognitiven Konflikt der Schüler deutlich benennen: "Mathematik scheint zu funktionieren, obwohl sie zirkuläre oder undefinierte Begriffe enthält." Als Überleitung zum Stundenfazit wird die bisher offen gebliebene Schülerfrage (vgl. Durchführung zur 6. Stunde der Einheit und Anhang, S. 17) von Shervin, Michel, Katharina und Alina "Gibt es in der Mathematik perfekte Definitionen?" in einem stummen Impuls an die Pinwand gehängt. Die Schüler werden voraussichtlich die Frage verneinen und als - vielleicht stillschweigendes - Argument das Zirkelverbot anbringen.

Durchführung: Überraschend schnell wird das Kling-Klang-Gloria-Spiel verstanden, Philipp spielt sogar mit und ergänzt die Begriffskette eigenständig. In der Analyse des Wortspiels stellen verschiedene Schüler einen Bezug zur Vorstunde her und beschreiben Definitionszirkel als "Potenzieren des Begriffs" (Sören), "Kreislauf der Begriffe". Sarah bezieht das Zirkel-Problem auf "perfekte Definitionen" und fordert als weiteres Merkmal perfekter Definitionen die eindeutige Klärung sämtlicher definierender Begriffe. Die Auswertung des Gedankenexperiments zeigt eine unerwartete Aspekt- und Gedankenvielfalt (in Auszügen): "Mathematik kann nicht gelernt (i.S. von hat keine Geschichte) werden, sondern wird von den Urahnen der Mathematik an gleich betrieben." (Sarah, Hannes, Paloma), "Es muss aber auch für diese Leute einen Wissensanfang gegeben haben, schließlich ist der Punkt keine Erfindung (Lars, Philipp, Nils, Hendrik), "Auch dieses Wissen muss aber transportiert werden. Dazu sind Definitionen und Regeln erforderlich."(Hannes, Nico), "Würde es denn Mathematik überhaupt geben, wenn Definitionen Zirkel enthielten?" (Lehrer). Als Schlusswort und Fazit der Stunde: "Nein, aber es gibt doch die Mathematik!"(Nils), "Also muss Definieren anders funktionieren!"(Philipp),"Man braucht eben beides: Beispiele und irgendwie Sprache."(Lukas).

6.12 Die zwölfte und letzte Unterrichtsstunde am 03.09.2004.

Thema: Wie der Mathematiker Definitionszirkel umgeht.

Hauptlernziel: Die Schüler sollen erkennen, wie der *working mathematician* das Problem der Definitionszirkel umgeht.

Planung: Als **Einstieg** und Lernzielkontrolle sollen die Gruppen ihre Begriffsbäume aus der 10. Unterrichtsstunde aufhängen und nach einer kurzen Beratung ihre wesentlichen Ergebnisse und Überlegungen vorstellen. In einem anschließenden Vergleich sollen die Schüler erkennen, dass und wie sich der kognitive Konflikt der

Vorstunde im Aufbau ihrer Begriffsbäume niederschlägt. Zur **Sicherung** und Festigung der Diskussionsergebnisse werde ich anschließend die Folie "Das Verwechslungsproblem" (vgl. Anhang, S. 8) auflegen, den Inhalt kurz rekapitulieren lassen und fragen: "Konnten wir eine oder sogar beide Vermutungen bestätigen?" Die Schüler stellen Bezüge zum Vorunterricht und zur vorangegangenen Diskussion her und erkennen, dass keine der ursprünglichen Vermutungen richtig sein kann. Um die Schüler nicht in der aufgemachten Aporie stehen zu lassen und den Mathematikunterricht schlimmstenfalls dem Verdacht der Sinnlosigkeit auszusetzen, aber auch um bestimmte Aspekte der erarbeiteten Definitionslehre mit Blick auf die innermathematischen Anwendungen (strenge Unterscheidung zwischen Voraussetzung und Behauptung, Beweisverpflichtung für mathematische Behauptungen) zu betonen, werde ich die Schüler mit der modernen Variante euklidischen Mathematikverständnisses vertraut machen; es handelt sich um die Position des Formalismus, wie sie von David Hilbert paradigmatisch vertreten wurde. Die Kernthesen seiner Position lassen sich so reduzieren, dass sie vor dem neuerworbenen Problemverständnis der Schüler nachvollziehbar sind und zu schulpraktischen Faustregeln für das Definieren vereinfacht werden kann. Zur besonderen Motivation werde ich die Position als Interviewausschnitt mit David Hilbert inszenieren (vgl. Anhang, S. 28). Nach der gemeinsamen Textlektüre und der Klärung etwaiger Verständnisfragen, soll Hilberts Antwort auf die Frage, wie Mathematiker über abstrakte Dinge reden können, ohne Verwechselungen befürchten zu müssen herausgestellt und diskutiert.

Durchführung: Auch die Schüler erkennen die wesentlichen Unterschiede und Gemeinsamkeiten der Plakate: die Art der verwendeten Begriffe wird als Indiz für die Intensität der Lexikonrecherche (vgl. Anhang, S. 22 oben), die Unübersichtlichkeit mancher Begriffsbäume als Ausdruck chaotischer Begriffsverhältnisse (vgl. Anhang, S. 23) angesehen.

In der Sicherungsphase werden beide Vermutungen (vgl. Anhang, S. 8) als falsch zurückgewiesen und es wird sofort nach einer möglichen Kombination beider Vermutungen gesucht. Überraschenderweise werden hier Positionen formuliert, die im Kern den klassischen Positionen der mathematikphilosophischen Grundlagenforschung entsprechen; sie sind in Diskussionen von einzelnen Schülern (Hauke, Sören, Henning, Hannes, Phillip, Sarah, Nils) immer wieder formuliert und vertreten worden. Wegen ihrer philosophischen Bedeutung werden diese Positionen an der Tafel festgehalten und ihren Gründervätern zugeordnet (vgl. Anhang, S. 19).

Das "Hilbert-Interview" löste bei einigen Schülern sofort Zustimmung aus - auch wenn sein Auftreten als arrogant eingeschätzt wurde. Die Schüler greifen das Tafelbild auf und grenzen davon die Hilbert-Position ab.

Der sonst sehr stille Hoang beendet die Stunde und die Unterrichtsreihe; er kann den kompletten Gedankengang der Unterrichtsreihe gut formuliert und auf die wesentlichen Zusammenhänge reduziert wiedergeben.

7 AUSWERTUNG

7.1 Lernzielkontrolle

7.1.1 Die Klassenarbeit

Wie geplant wurde der Stoff der Einheit als wesentlicher Teil einer Klassenarbeit abgeprüft (vgl. Anhang, S.). Der Reihenkonzeption entsprechend waren sowohl mathematische (Aufgaben 1, 2, 3 und 4) als auch philosophische Aufgaben (Aufgaben 5 und 6) zu bearbeiten.

Aus Tabelle I ist das Aufgabenniveau, die max. Punktzahl sowie die von den Schülern durchschnittlich erreichte Punktzahl der einzelnen Aufgaben ersichtlich. Die erste Aufgabe bezieht sich auf das unmittelbare Vorfeld der Einheit (Viereckskonstruktionen).

Aufgaben-nummer	1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5	6	ZA
Aufgaben-niveau	I	I	II	II	II	I	II	II	III	III	II	III
max. Punktzahl	10	2	2	3	4	5	5	3	3	3	5	5
durchschn. Punktzahl	8,5	1,8	1,5	1,0	3,8	3,4	3,2	1,8	0,5	1,2	4,0	0,1

Tab. I

Die Tabelle II veranschaulicht den Klassenspiegel und dokumentiert den Erfolg der Einheit:

Note	1	2	3	4	5	6
Punkte	45-38,5	38-31,5	31-24,5	24-17,5	17-8,5	8,5-0
Anzahl	0	11	14	5	0	0

Tab. II

Im Unterschied zu vorangegangenen Arbeiten gab es keine "mangelhaften" bzw. "ungenügenden", aber auch keine "sehr gut" bewältigten Bearbeitungen. Insgesamt war

die Leistungsverteilung in dieser Arbeit sehr homogen auf die Notenbereiche "gut" und "befriedigend" verteilt. Der Anteil "ausreichend" gelöster Arbeiten war erfreulicherweise sehr gering (im Vergleich zu vorangegangenen Klassenarbeiten).
Die Arbeit stellte sehr hohe Anforderungen an Konzentrations- und Argumentationsfähigkeiten (A. 4, 5, 6) und setzt ein flexibel anwendbares und sicheres Wissen aus der Vierecksgeometrie voraus; dennoch ist sie bei vergleichbarem Wertungsmaßstab besser ausgefallen als vorangegangene Arbeiten. Das werte ich als ein wichtiges Indiz für den grundsätzlichen Erfolg der Einheit: Die wesentlichen mathematischen und philosophischen Lernziele wurden erreicht.
In diesem Sinn lässt sich die gute Bearbeitung von Aufgabe 6 verstehen: Hier sollten die Schüler wesentliche Gedanken und Gedankenschritte der Einheit reorganisieren und reproduzieren; sie wurde von mir unter den Gesichtspunkten inhaltliche Richtigkeit und Vollständigkeit, sprachliche Richtigkeit und argumentative Stringenz bewertet (besonders originelle Antworten wurden mit Zusatzpunkten belohnt). Diese Aufgabe wurde überdurchschnittlich gut gelöst; allerdings nutzten nur wenige Schüler das Szenario des fiktiven Gesprächs, um inhaltliche Eckpfeiler der Einheit nicht nur wieder zu geben, sondern (wenigstens ansatzweise) gedanklich zu entwickeln. Diesem Befund entspricht das relativ schlechte Bearbeitungsergebnis für die Aufgaben 4b) und 5): Aufgabe 5 fragt Grundkenntnisse der Definitionslehre ab, die jetzt aber in einen sinnvollen argumentativen Zusammenhang zu den Inhalten der Vierecksgeometrie einerseits und dem besonderen Kontext dieser Aufgabe andererseits gestellt werden mussten. Die Lösung von Aufgabe 4b) setzt ein gutes geometrisches Vorstellungsvermögen und ein sicheres Grundwissen über Vierecke voraus, das zu einem Argument zusammengefügt werden muss. Die Lösung dieser Aufgaben verlangt schon ein so tiefgreifendes Verständnis für die Anwendungsreichweite insbesondere der philosophischen Inhalte der Unterrichtseinheit, dass es nicht mehr von allen Schülern mühelos erreicht werden kann. Dieses Verständnis allen Schülern zu eröffnen, ist nicht schon innerhalb von zehn oder zwölf Unterrichtsstunden möglich.

7.1.2 Gedankenprotokoll der Einheit

Die abschließende Hausaufgabe (vgl. Durchführung zur 12. Stunde) bestand in einem Brief an einen fiktiven Freund, in dem die Schüler erklären und beschreiben sollten, was sie in den letzten zwölf Stunden gemacht und gelernt haben. Die Auswertung dieser

Briefe war in verschiedener Hinsicht sehr erfreulich: Viele dieser Briefe (für eine kleine Auswahl vgl. Anhang, S. 45 *ff*.) dokumentieren lückenlos den Verlauf der Einheit und geben bis in kleinste Stundendetails Auskunft über die behandelten Unterrichtsinhalte. Nicht selten enthalten sie eineindeutige Reproduktionen einzelner Gesprächsszenarien. Die im Anhang beigefügten Briefe (sogar von der eher stillen Janina) zeigen, dass auch in schwierigen Phasen dem Unterricht aufmerksam gefolgt wurde und auch kompliziertere Inhalte und Sachabläufe (auch in eigenen Worten) von den Schülern wiedergegeben werden konnten.
Auch Kommentare der Schüler wie "Ich habe ein besseres Gefühl als vor anderen Mathearbeiten" oder "Ich habe dabei viel gelernt über einfaches und präzises Definieren und kann auch alltägliche Gegenstände kurz und verständlich erklären" oder "auf jeden Fall ist das Thema auch für viele allgemeine Sachen sehr hilfreich" bestätigen das positive Bild und die erzielten Erfolge dieser Unterrichtseinheit.

7.1.3 Mündliche Leistungen

Insgesamt war die Beteiligung deutlich höher als im Vorunterricht; es viel auf, dass sich sonst zurückhaltendere Schüler lebhaft und kontinuierlich an den Diskussionen beteiligten. Insgesamt haben die Gedankenprotokolle zu den Einzelstunden, die Gedankenexperimente und ihre Auswertung in Gruppen- und Klassendiskussion die schon bestehende Argumentations- und Gesprächskultur innerhalb der Lerngruppe verbessert: Die Schüler gehen stärker als bisher auf die Diskussionsbeiträge ihrer Mitschüler ein; die Ansätze zu hypothetischem und abwägendem Argumentieren sind deutlicher erkennbar geworden.

7.2 KRITISCHER RÜCKBLICK

Rückblickend sehe ich die anfänglich aufgestellten Thesen (vgl. Einleitung) als bestätigt an. Die Reaktionen der Kinder, ihr Lernerfolg und der Spaß, den sie im Verlauf der Einheit hatten, verdeutlichen, dass ein philosophisch orientierter Geometrieunterricht eine wirkliche Bereicherung gegenwärtiger Unterrichtskultur sein kann. Ich halte es daher für sinnvoll, auch in anderen Jahrgängen und in anderen mathematischen Bereichen philosophische Aspekte in den Unterricht einzubeziehen.

8 LITERATURVERZEICHNIS

BOCK, H., BORNELEIT, P. (2000): *Logisches Denken - Einige Gedanken über ein altes Ziel und seine Verfolgung im Mathematikunterricht.* In **FLADE/HERGET 2000,** S. 59 - 68.

BRÜNING, B. (2003): *Philosophieren in der Sekundarstufe. Methoden und Medien*. Beltz Verlag: Weinheim, Basel, Berlin 2003.

BÜRGER, H. (2000): *Argumentieren im Mathematikunterricht.* In **FLADE/HERGET 2000,** S. 31 - 38.

ENGELS, H. **(2004):** *"Nehmen wir an..." - Das Gedankenexperiment in didaktischer Absicht*. Beltz Verlag: Weinheim und Basel 2004.

FLADE, L., HERGET, W. (Hrsg.) (2000): *Mathematik. Lehren und Lernen nach TIMSS. Anregungen für die Sekundarstufen*. Volk und Wissen Verlag: Berlin 2000.

FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Band 1 - 2. Ernst Klett Verlag: Stuttgart, 1973.

GRIESEL, H. (2000): *Sind die Vorrangregeln für das Berechnen von Termen beweisbare Sätze? Eine didaktisch orientierte Sachanalyse*. In **FLADE/HERGET 2000,** S. 39 - 42.

HOLLAND, G. (1996): *Geometrie in der Sekundarstufe. Didaktische und methodische Fragen*. Spektrum Akademischer Verlag: Heidelberg/Berlin ^{2}1996.

JANICH, P. (1997): *Kleine Philosophie der Naturwissenschaften*. Beck: München 1997.

[NEUE WEGE 8] Lergenmüller, A., Schmidt, G. (Hrsg.): *Mathematik. Neue Wege 8. Arbeitsbuch für Gymnasien.* Schroedel Verlag: Hannover 2002.

LEUDERS, T. (2003): *Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I* *und II.* Cornelsen Verlag: Berlin, 2003.

LEUDERS, T. (2003): *Mathematik betreiben. Problemlösen*. In **LEUDERS 2003**, S. 119 - 135.

LORENZEN, P. (1987): *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie.* Bibliographisches Institut: Mannheim/Wien/Zürich 1987.

MARTENS, E. **(2003)**: *Methodik des Ethik- und Philosophieunterrichts. Philosophieren als elementare Kulturtechnik.* Siebert Verlag: Hannover 2003.

[LEHRPLAN PHILOSOPHIE] Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Forschung und Kultur des Landes Schleswig-Holstein (Hrsg.) (1997): *Lehrplan für die Sekundarstufe 1 der weiterführenden allgemeinbildenden Schulen Hauptschule, Realschule, Gymnasium, Gesamtschule. Philosophie.* Glückstadt 1997.

[LEHRPLAN MATHEMATIK] Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Forschung und Kultur des Landes Schleswig-Holstein (Hrsg.) (1997): *Lehrplan für die Sekundarstufe 1 der weiterführenden allgemeinbildenden Schulen Hauptschule, Realschule, Gymnasium, Gesamtschule. Mathematik*. Glückstadt 1997.

MITTELSTRAß, J. (1974): *Die Möglichkeit von Wissenschaft*. Suhrkamp Verlag: Frankfurt a.M. 1974.

SCHMID, A. (Hrsg.) (1999): *LS 8. Lambacher Schweizer. Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium. Ausgabe A*. Ernst Klett Verlag: Stuttgart, Düsseldorf, Leipzig, 1999.

[SCHÜLERDUDEN MATHEMATIK] Meyers Redaktionsleitung (Hrsg.): *Schülerduden. Die Mathematik I.* Bibliographisches Institut: Mannheim [5]1990.

[SCHÜLERDUDEN PHILOSOPHIE] Redaktion für Philosophie des Bibliographischen Instituts unter der Leitung von Gerhard Kwiatkowski (1985): *Schülerduden. Die Philosophie. Ein Sachlexikon der Philosophie*. Bibliographisches

Institut: Mannheim/Wien/Zürich 1985.

SERVAIS, W. (1981): *Ein umfassender und moderner Geometrieunterricht*. In **STEINER/WINKELMANN 1981**, S. 53 - 85.

STEENBLOCK, V. (2002): *Philosophische Bildung. Einführung in die Philosophiedidaktik und Handbuch: Praktische Philosophie*. LIT Verlag: Münster, Hamburg, London [2]2002.

STEINER, H.-G., WINKELMANN, B. (Hrsg.) (1981): *Fragen des Geometrieunterrichts*. Aulis Verlag: Köln 1981.

STEINER, H.-G., WINKELMANN, B. (1981): *Aktuelle Probleme des Geometrieunterrichts aus der Sicht der Bielefelder Geometrietagung*. In **STEINER/WINKELMANN 1981**, S. 215 - 228.

THIEL, CH. (1995): *Philosophie und Mathematik. Eine Einführung in ihre Wechselwirkungen und in die Philosophie der Mathematik.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft: Darmstadt 1995.

VOLKERT, K. (1999): *Das Haus der Vierecke - aber welches ?* Der Mathematikunterricht, Heft 5/ 1999, S. 17 *ff.*

VOLLRATH, H. J. (1981): *Geometrie im Mathematikunterricht - Eine Analyse neuer Entwicklungen.* In **STEINER/WINKELMANN 1981**, S. 11 - 28.

VON HENTIG, H. (1985): *Die Menschen stärken, die Sachen klären. Ein Plädoyer für die Wiederherstellung der Aufklärung*. Reclam: Stuttgart 1985.

WALSCH, W., FLADE, L. (2000): *Zum Beweisen im Mathematikunterricht*. In **FLADE/HERGET 2000,** S. 25-30.

WITTMANN, E. (1978): *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Vieweg: Braunschweig, [5]1978.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich diese Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe.

Mit einer eventuellen Ausleihe der Arbeit bin ich einverstanden.

Lübeck, den 26.02.2005

-