Mathematikdidaktische Potentiale philosophischer Denkrichtungen[1]

Dr. Jörn Schnieder
Institut für Mathematik
Universität zu Lübeck
Ratzeburger Allee 160
23562 Lübeck
schniede@math.uni-luebeck.de

0. Einleitung

In diesem Aufsatz soll gezeigt werden, dass die Philosophie ein hohes mathematikdidaktisches Potential hat. Es soll gezeigt werden, dass sich Denk- und Arbeitsmethoden charakteristischer Grundströmungen der Philosophie „transformieren"[2] lassen, so dass mit ihnen mathematische Begriffe, Sätze und deren Beweise sowie Theorien und ihre Begründungsarchitektur insgesamt selbständig und unter wissenschaftlichen Gesichtspunkten erarbeitet werden können. Aus philosophischen Denk- und Arbeitsmethoden lassen sich - so unsere Behauptung - mathematische Lernstrategien entwickeln, die insbesondere mathematische Anfänger dazu anleiten können, ihr Mathematiklernen selbständig zu organisieren und ihren Lernerfolg schließlich auch zu reflektieren. Zugespitzt und pointiert formuliert behaupten wir also, durch Philosophieren Mathematiklernen lehrbar und lernbar machen zu können. Philosophische Denk- und Arbeitsmethoden, so unsere Behauptung, können einen wichtigen Beitrag zum Erwerb mathematischer Lernkompetenz[3] (im Unterschied zum Erwerb mathematischer Sachkompetenz) leisten.
Es ist nur auf den ersten Blick überraschend, dass philosophische Denk- und Arbeitsmethoden auch für das Mathematiklernen fruchtbar gemacht werden können: die Philosophie, zumindest sehr einflussreiche Strömungen in ihr, hat im Verlauf ihrer langen und facettenreichen Geschichte thematisch immer auch Fragen nach den Bedingungen und der Möglichkeit von Wahrheit, Erkenntnis und Wissenschaft überhaupt[4] gestellt und im Verlauf ihrer langen und vielfältigen Geschichte ein reiches „Argumentationsarsenal"[5] zur Präzisierung und methodisch gestalteten Beantwortung dieser Fragen entwickelt.
Welche Vorteile könnten sich aus diesem Ansatz für den Hochschulunterricht im Allgemeinen und für den mathematischen Hochschulunterricht im Besonderen ergeben? Zunächst lässt sich, so unsere Vermutung, das, was hier exemplarisch für die Mathematik (und auch in diesem Fall nur in Ansätzen) gezeigt wird, auch auf andere Disziplinen, und zwar insofern sie als Wissenschaft gelernt und gelehrt werden, übertragen und etwa im Rahmen eines fächerübergreifenden Kompetenz- genauer Lernkompetenzmodells[6] für

---

[1] Der Titel ist bewusst in enger Anlehnung an eine Formulierung aus **ROHBECK** 2010, S. 75 formuliert.
[2] Zum philosophiedidaktischen Hintergrund dieses Begriffs siehe **ROHBECK** 2010, S. 12 *ff.*
[3] Zum Kompetenz und Lernkompetenz aus allgemeinpädagogischer Perspektive sehr klar und verständlich **MEYER** 2007, S. 148 - 161, einen ersten Überblick aus mathematikdidaktischer Perspektive findet sich etwa in **BLUM** 2006, S. 33 – 50, neuerdings ausführlich auch in **KRATZ** 2011.
[4] Vgl. dazu den kurzen Überblicksartikel **MITTELSTRASS 2004** und ausführlicher **MITTELSTRASS 1970**
[5] Vgl. dazu ausführlich **SPAEMANN** 1983, hier insbesondere S. 108.
[6] Zwar gibt es - zumindest im Rahmen der Schuldidaktik - schon für viele Disziplinen mehr oder weniger gut ausgearbeitete Kompetenzmodelle; sie sind aber nicht durch eine einheitliche nämlich wissenschaftspropädeutische Perspektive verbunden, wie es aber dann notwendig wäre, wenn einzelne Disziplinen nicht mehr als Selbstzweck sondern als „Anlässe für Bildung" gesetzt würden. Vgl. dazu **HENTIG** 1999 insbesondere S. 179 *ff.*

wissenschaftliches Denken und Arbeiten verallgemeinern und systematisch darstellen. Einen weiteren Vorteil dieses Ansatzes sehen wir darin, dass Studierende mit ihm fachspezifische und auf den wissenschaftlichen Anspruch der jeweiligen Disziplin bezogene Lernstrategien erwerben können. Sie können damit die Schwierigkeit umgehen, allgemeine Anleitungen zur fächerübergreifenden Förderung der Lernkompetenz für Schule und Hochschule selbständig auf ihr jeweiliges Fach beziehen zu müssen. Für Dozenten der jeweiligen Disziplin könnte ein wichtiger Vorteil dieses Ansatzes darin liegen, dass sie sich bei der mathematikdidaktischen Transformation philosophischer Denk- und Arbeitsmethoden in fachspezifische Lernstrategien gerade keine umfangreichen philosophischen Kenntnisse und Fähigkeiten benötigen, sondern bei den Erkenntnissen der aktuellen Philosophiedidaktik und -methodik „bedienen" können[7], deren Anspruch es ja ist, im Prinzip für jedermann nicht nur verständlich, sondern auch ganz praktisch nachvollziehbar zu sein.[8]
In der vorliegenden Arbeit werden schwerpunktmäßig didaktische und weniger unterrichts- bzw. lehrmethodische Aspekte des Ansatzes vorgestellt. Überlegungen zur methodischen Umsetzung in der Lehre, d.h. Überlegungen dazu, wie diese Denk- und Arbeitsmethoden überhaupt und schließlich auch auf unterschiedlichen Kompetenzstufen[9] und Anforderungsniveaus erworben werden können, werden in einem nächsten Aufsatz vorgestellt werden[10]. Mathematikdidaktisch konzentrieren wir unsere Darstellung auf das Sinn verstehende Lesen mathematischer Beweise, einem gerade für mathematische Anfänger (sehr) schwierigen Problem, für dessen „Entschärfung" der hier skizzierte Ansatz unserer Einschätzung nach eine plausible und sinnvolle Hilfestellung anbieten kann. Auch aus philosophischer Perspektive nehmen wir eine Einschränkung vor. Wir orientieren uns an der üblichen Einteilung der Gegenwartsphilosophie in fünf Grundrichtungen (Hermeneutik, analytische Philosophie, Dialektik, Phänomenologie und spekulative Philosophie) und beschränken uns darauf, lediglich das mathematikdidaktische Potential von Hermeneutik, analytischer Philosophie und Dialektik, und zwar unter der genannten Perspektive des Sinn verstehenden Lesens mathematischer Beweise zu untersuchen[11].
Die Arbeit enthält neben der **Einleitung**, dem **Literaturverzeichnis** und einem **Anhang** fünf Abschnitte: Im **ersten Abschnitt** wird im Anschluss an grundlegende wissenschaftstheoretische Überlegungen und einer kurzen Skizze der fünf wichtigsten Denkrichtungen der Gegenwartsphilosophie ein philosophiedidaktisch motiviertes Kompetenzmodell wissenschaftlichen Lernens am Beispiel der Mathematik vorgestellt. Im **zweiten Abschnitt**, **dritten** und **vierten Abschnitt** werden die Grundideen von Hermeneutik, analytischer Philosophie und Dialektik genauer beschrieben. Dabei liegt der Fokus unserer Darstellung jeweils darauf, welche Hilfestellung diese Denkrichtungen bei der selbständigen Erarbeitung und dem selbständigen Sinn verstehenden Lesen mathematischer Beweise geben können. Der **fünfte Abschnitt** fasst die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit nochmals zusammen.

1. Philosophische Aspekte allgemeiner wissenschaftlicher Arbeitsmethoden

[7] Neben **MARTENS** 2003, **ROHBECK** 2010 enthält insbesondere **BRÜNING** 2003 zahlreiche Anregungen und viele Hinweise auf konkrete (philosophie-) didaktische Literatur.
[8] **MARTENS** 2003, S. 19.
[9] Zum Ansatz des Kompetenzstufenmodells vgl. **MEYER** 2007, S. 156 *ff.*
[10] Voraussichtlich schon zum Beginn des kommenden Schuljahres 2012/13 wird der in dieser Arbeit skizzierte Ansatz im Rahmen einer ganztägigen Lehrerfortbildung in Kooperation mit dem IQSH Schleswig-Holstein im schulischen und im Rahmen einer mathematischen Vorkurswoche auch zum Beginn des kommenden WS 12/13 an der Universität zu Lübeck praktisch erprobt.
[11] Das Potential der Phänomenologie und der spekulativen Philosophie wird in einer nachfolgenden Arbeit vorgestellt.

Der Grundgedanke zur mathematikdidaktischen Transformation philosophischer Denk- und Arbeitsmethoden lässt sich in einem einfachen Raster darstellen (siehe Anhang). In diesem Raster werden die vertikalen Begriffe „Begriff“, „Satz“ und „Theorie“ mit den fünf wichtigsten Denkrichtungen der Philosophie, nämlich der Hermeneutik, der analytischen Philosophie, der Phänomenologie, der Dialektik und der spekulativen Philosophie "gekreuzt". Dabei stehen die Begriffe „Begriff“, „Satz“ und „Theorie“ für die logischen Grundbausteine einer jeden Wissenschaft[12] und insbesondere auch eine unter wissenschaftlicher Perspektive betriebenen Mathematik[13]. Als philosophische Denkrichtungen[14] unterscheidet man horizontal die

- **Hermeneutik** als die Reflexion auf die Methoden systematischer Interpretation nicht nur von Texten und etwa Kunstwerken, sondern ganz allgemein auch von Handlungen überhaupt
- **analytische Philosophie** als die Reflexion auf die Methoden korrekten Definierens und schlüssigen Argumentierens
- **Dialektik** als die Reflexion auf die Methoden zur Bearbeitung von (Denk-) Widersprüchen und allgemein zum Führen gelingender Dialoge und Gespräche
- **Phänomenologie** als die Reflexion auf die Methoden korrekten Beschreibens und Wahrnehmens lebensweltlicher und wissenschaftlicher Zusammenhänge
- **spekulative Philosophie** als der systematischen Reflexion auf Methoden zur Entwicklung intuitiv-kreativen Denkens und der „Horizonterweiterung“.

Dass und wie genau mit diesem Schema den wissenschaftsdidaktischen Idealen von „Mitteilung“, „Verständlichkeit“, „Gewissheit“, „Spezialisierung“, „Kontinuität“, „Verfügbarkeit“[15] einerseits und den wissenschaftstheoretischen Idealen der Wahrheit, der Begründung, der Erklärung und des Verstehens, der Selbstreflexion und der Intersubjektivität[16] in besonderer Weise Rechung getragen wird, muss an anderer Stelle ausführlich erläutert werden[17].
Auch geht es in diesem Schema nicht darum, die einzelnen Methoden trennscharf gegeneinander abzugrenzen[18]. Gleichwohl haben sie, und das wird im Folgenden noch zu verdeutlichen sein, charakteristische Eigenschaften, durch die sie sich spezifisch abgrenzen lassen. Dass und wie sich in diesem Schema auch die fachdidaktisch üblicherweise gebräuchlichen mathematischen Kompetenzen, wenngleich in ihrer philosophisch-methodischen Anteile zerlegt, wieder finden lassen, auch das muss einer späteren Detailanalyse überlassen bleiben.

2. Mathematikdidaktisches Potential der Hermeneutik

„Die Sprache Mathematik ist eine der schriftlichen Texte“[19]. Mathematik betreiben heißt nicht zuletzt auch fähig sein, mathematische Texte Sinn entnehmend zu lesen. Die mathematische

[12] Vgl. dazu den auch wissenschaftsgeschichtlich aufschlussreichen Überblick in **MITTELSTRASS** 1974, S. 29 *ff.*
[13] Speziell für die Mathematik sehr klar formuliert in **THIEL** 1973 und hier insbesondere S. 113 *f.*
[14] Wir orientieren uns an den Ausführungen in **MARTENS** 2003. Ein alternatives Modell mit sechs statt fünf Grundrichtungen liefert **ROHBECK** 2010. Beide Ansätze sind aber im Wesentlichen identisch. Ein erster Vergleich beider Ansätze findet sich in **TIEDEMANN** 2004. In **RENTSCH** 2007 wird mit sprachphilosohisch-pragmatischen Argumenten gezeigt, dass beide Ansätze als „Hochstilisierung“ alltagssprachlich vermittelter Denk- und Handlungspraxen rekonstruierbar und insofern vergleichbar sind.
[15] Siehe dazu wissenschaftsdidaktischen Vorschlag in **HENTIG** 2003, S.181 *ff.*
[16] **TETENS** 2008, S. 24.
[17] Vgl. dazu die Ausführungen in meinem Manuskript „Mehr Philosophie wagen im Mathematikunterricht – an Schule und Hochschule!“, das voraussichtlich am Jahresende publiziert wird.
[18] **BLUM**, S. 20, 34 *f.*
[19] **MEHRTENS** 1990, S. 9.

Sprache besteht zwar nicht selten aus einem komplizierten Wechselspiel aus Prosa- und Formelsprache in der es „um Möglichkeiten des Setzens von Zeichen nach strengen Regeln"[20] geht, „die sich ohne Widersprüchlichkeiten ineinander fügen"[21]. Mathematische Beweise erschöpfen sich aber nicht in der logischen Schlüssigkeit und einen Beweis und mit ihm den bewiesenen Satz zu verstehen, heißt auch mehr als seine logische Schlüssigkeit nachvollzogen und überprüft zu haben. Vielmehr erschließt sich auch aus geltungstheoretischer Perspektive das Ganze eines Beweises oft aus dem Einzelnen und umgekehrt das Einzelne nur aus dem Ganzen, d.h. aus einer wechselseitigen Betrachtung kleinerer und größerer Beweisabschnitte, d. h. dass sich ein adäquaten Verständnis als „ein Prozess der Bildung und Korrektur von Hypothesen darstellt."[22] Insgesamt, so lässt sich die geltungstheoretische Perspektive auf einen Beweis verallgemeinern, kann ein Beweis erst dann als verstanden gelten, wenn sein Leser über ein vollständiges Bild seiner theoriegeschichtlichen wie auch seiner forschungslogischen Bedeutung verfügt, also erst nach seiner Einordnung in den forschungsgeschichtlichen Horizont, d.h. erst nach der Aufdeckung etwa der leitenden Forschungsinteressen. Mathematische Theorien ordnen sich in einen geschichtlich gegebenen Forschungskontext ein und sind nicht selten auf ein spezielles Forschungsinteresse des jeweiligen Mathematikers[23] bezogen. Die (theorie-)geschichtlichen Ausgangspunkte mathematischen Wissens, ihrer Theorien, Sätze und schließlich auch Begriffe bleiben nicht nur als „Spuren", sondern als „unauslöschliche Prägung" in seinen „Endformen"[24] erhalten. Gerade aber insofern jede Wissenschaft als Handlungszusammenhang und damit unter Zweck-Mittelperspektive zu rekonstruieren sein sollte[25], gehört zu einem vollständigen Verständnis mathematischer Begriffe, Sätze und letztlich auch Theorien die umfassende Kenntnis der jeweils forschungsleitenden Interessen und der durch sie verdrängten Alternativen.

Die Hermeneutik als Theorie und Praxis des Verstehens von Texten[26] widmet sich nun genau den Problemen, die dadurch entstehen, „dass die Sprache, in der Behauptungen formuliert und Argumente bzw. Begründungen zur Sicherung von Geltungsansprüchen vorgetragen werden, nicht oder nur in Teilen auch die ‚eigene' Sprache ist."[27] Sie stellt ihrem Selbstverständnis nach Methoden bereit, mit denen „das, was von anderen gesagt ist, insbesondere was uns schriftlich überliefert ist, in unser eigenes theoretisches Denken einbezogen werden"[28] kann, die in diesem Sinn auch keine spezifisch „geisteswissenschaftliche" Methode, sondern als „Kunst" für das Verstehen sprachlicher Ausdrücke und auch logischer Zusammenhänge[29] in sämtlichen Wissenschaften und insbesondere auch in der Mathematik anwendbar sind. Von besonderer Bedeutung für die Hermeneutik ist der „hermeneutische Zirkel"[30], den Hans-Georg Gadamer in seinem philosophischen Klassiker "Wahrheit und Methode" als einen Prozess von „Vorentwurf", „Textverstehen" und „Verschmelzung der Horizonte" auffasst[31]. Im Verstehensprozess bewegen wir uns notwendigerweise in dem „hermeneutischen

[20] **MEHRTENS** 1990, S. 12.
[21] **MEHRTENS** 1990, S. 12.
[22] **RIDDER** 2000, S. 127.
[23] Dieser Ansatz eröffnet geradezu eine soziologische Perspektive auf geltungstheoretische Aspekte der Mathematik wie etwa in **HEINTZ** 2000 beispielsweise S. 17 *f.* und in **UFER/HEINZE/KUNZE** 2009 beispielsweise S. 31 *f.*, der allerdings, zumal in den angegebenen Beispielen, eine Verwechselung von Gründe- und Wirkungsgeschichte zugrunde liegt, vgl. dazu **MITTELSTRASS** 1989, S. 174 *ff.*
[24] **HENTIG** 2003, S. 181.
[25] Vgl. dazu und zum kulturalistischen Verständnis von Wissenschaft insgesamt etwa **JANICH** 1997.
[26] Für einen ersten Überblick siehe **VERAART/WIMMER** 2004.
[27] **MITTELSTRASS** 1982, S. 170 *ff.*
[28] **LORENZEN** 1974, S. 18 f.
[29] **LORENZEN** 1974, S. 11.
[30] Vgl. dazu **GADAMER** 1990, S. 274 *f.* und aus sprachkritischer Perspektive **JANICH/KAMBARTEL/MITTELSTRASS** 1974, S. 128 – 137, insbesondere S. 128 *f.*
[31] **GADAMER** 1990, S. 383.

Zirkel"[32], dass wir einen Text mit unseren Erwartungen lesen, ferner dass wir die Einzelaussagen eines Textes nur aus dem Gesamtzusammenhang, und diesen umgekehrt erst aus den Einzelaussagen verstehen.
Im Sinne einer konkreten didaktischen Anregung lassen sich - ohne Anspruch auf Vollständigkeit und ohne hier alle Einzelheiten detailliert erläutern zu können - die mathematikdidaktischen Transformationen der Hermeneutik in einem Fragenkatalog zusammenfassen. Der wesentliche Ansatz dieses Katalogs besteht dabei darin, das „Vorverständnis" der Studierenden und das später erarbeitete „Textverständnis" explizit zu machen und anschließend gegenüber zu stellen und zu vergleichen bzw. zu kontrastieren. Die Erwartungen können sich in bestimmten Beweisen bestätigen, sie können jedoch auch enttäuscht oder aber gar übertroffen werden. So könnte beispielsweise vor der Erarbeitung eines Beweises der mathematische „Erwartungshorizont" des zu beweisenden Satzes erschlossen werden. Dazu werden wesentliche Schlüsselbegriffe, Beweisstrategien und Denkfiguren aufgedeckt, wie sie im theoretischen Umfeld bereits vorerschlossen sind oder verwendet wurden, um über den zu erwartenden Beweis, seine Hauptgedanken, die eingehenden Schlüsselbegriffe und Denkfiguren nachzudenken. Die Methode der Konfrontation von Erwartung und Lektüre kann innerhalb des Textes wiederholt werden, indem man nach der Erarbeitung eines Beweises erneut fragt, wie es nach den Vermutungen des Lesers weitergeht. Dieser Impulskatalog ermöglicht ein eigenständiges Erarbeiten mathematischer Beweise. Die Impulse knüpfen an die individuellen Vorkenntnisse der Studierenden an und überlassen ihm die Entscheidung, wie oft der Dreischritt „Vorverständnis formulieren – Textverständnis erarbeiten – Horizontverschmelzung" wiederholt wird. Letztlich ist die Durchführbarkeit dieses Dreischritts unabhängig von den Vorgaben des Lehrenden und somit ist dieses Verfahren auf die Autonomie des Studierenden ausgelegt. Dieses Verfahren ist als Lernstrategie besonders geeignet, weil es den Nutzer immer wieder auffordert seine eigenen Kenntnisse und Fähigkeiten einzuschätzen und seinen Lernprozess zu reflektieren, was zu einem selbstgesteuerten Lernprozess unabdingbar dazugehört.

Fragen- und Impulskatalog zum hermeneutischen Lesen mathematischer Beweise

1. Erschließung und Explikation von Vorverständnis und Erwartungshorizont

Welche Begriffe, Argumente und Denkfiguren werden vermutlich im Beweis eine zentrale Rolle spielen? Wo wird vermutlich die größte Hürde, der „Knackpunkt" im Beweis liegen? Welches Wissen, welche Begriffe und Zusammenhänge, welche Theoriekontexte werden benötigt und/oder als Vorkenntnisse vorausgesetzt oder – didaktisch formuliert – was ist das Ausgangsniveau? Welche Stellung hat der Satz bezogen auf das Theorieganze bzw. auf die Theoriegeschichte: Was lässt sich über die Entstehungssituation des Beweises, seinen gesellschaftlichen, kulturellen und historischen Hintergrund sagen (erfassen)? Inwiefern erweitert er bereits bestehende Erkenntnisse und baut auf diesen auf? Welche Bedeutung hat dieser Satz für den weiteren Aufbau der Theorie?
Erläutern Sie die Bedeutung des Satzes und seines Beweises an Beispielen, die die Voraussetzungen des Satzes nicht erfüllen. Auf welche Fragen – auch im Blick auch auf meinen persönlichen Lernprozess - möchte ich beim Durcharbeiten des Beweises besonders achten? Was werde ich gelernt haben, wenn ich den Satz und seinen Beweis am Ende vollständig verstanden haben werde? Welchen Erkenntnisgewinn erwarte ich nach der Erarbeitung des Beweises? Wie viel Geduld welches Maß an Lernbereitschaft, Selbstkritik und Bescheidenheit wird die vollständige Durchdringung des Beweises erfordern?

2. Lektüre des Beweises

[32] Zu Begriff und Geschichte dieses Begriffs siehe **VERAART/WIMMER** 2004.

Versuchen Sie Satz für Satz nachzuvollziehen und versuchen Sie sämtliche Lücken und Leerstellen in der Beweisformulierung auszufüllen und zu ergänzen. Übersetzen Sie dazu auch gegebene Formeln in grammatikalisch korrekte Sprache. Versuchen Sie aber auch umgekehrt Prosa – wo es sinnvoll und möglich ist – in Formelsprache zu übersetzten. Bestimmen Sie die Hauptbegriffe, die wesentlichen Beweisschritte und Argumente. Formulieren Sie geeignete Überschriften. Fertigen Sie Strukturskizzen, Schaubilder und Analyseschemata zur Bestimmung des Argumentationsganges an.
Um welches Phänomen geht es im Beweis? Worin besteht/bestehen die tatsächliche(n) Hauptschwierigkeit(en) im Beweis? Was ist das Neue, Ungewohnte des Beweises im Blick auf seine Methode und seinen Inhalt?

3. Konfrontation von Vorerfahrung und Erwartungshorizont und Horizontverschmelzung

Was ergibt sich aus dem Vergleich/der Konfrontation des „Vorverständnisses" und des „Erwartungshorizontes" mit den tatsächlich erarbeiteten Ergebnissen? Welche Fragen wurden beantwortet, welche Erwartungen wurden erfüllt bzw. blieben offen oder wurden enttäuscht? Worin liegen die Ursachen für die Differenz zwischen Erwartung und Ergebnis? Welche Konsequenzen ergeben sich aus diesem Ergebnis? Wie wären für einen erneuten Durchlauf der hermeneutischen Spirale Vorverständnis und Erwartungshorizont neu zu formulieren?

3. Mathematikdidaktisches Potential der analytischen Philosophie

Begrifflich-argumentatives Rechenschaftsgeben gehörte zwar seit jeher zur Technik philosophischer Reflexion, wie sich an vielen Beispielen etwa bei Sokrates, Platon, Aristoteles, Montaigne, Descartes, Frege, Russel, Wittgenstein, Carnap, Quine[33] und vielen anderen zeigen lässt. Aber in ihrer ausdrücklich selbstreflexiven Form, d.h. in ihrem Interesse an systematischen und im wesentlichen vom historischen Kontext unabhängigen Geltungsfragen, ist sie eine besondere Form der Gegenwartsphilosophie, wie sie insbesondere durch angelsächsische und skandinavische Philosophen vertreten wird. Die analytische Philosophie betont besonders die methodischen Aspekte nicht nur des Philosophierens, sondern ganz allgemein des geltungsorientierten und schließlich wissenschaftlichen Nachdenkens. Sie stellt ihrem eigenen Anspruch nach klare Regeln der Begriffsdefinition, Argumentation und Kritik auf. Die analytische Philosophie[34] vertritt - so lässt sich stark vereinfachend sagen - als zentrales Anliegen, den Geltungsanspruch von Sätzen der Wissenschafts- und Alltagssprache durch die methodisch geleitete Analyse der in diese Sätze und ihrer Begründung eingehenden Begriffe, Sätze und Argumentationen zu klären. Dabei kommt es ihr, und das ist aus mathematikdidaktischer Perspektive wichtig, insbesondere auch darauf an, diese Methoden selber explizit zu machen und sie nochmals einer geltungstheoretischen Überprüfung zu unterziehen.
Viele Verfahren der allgemeinen Begriffs- und Argumentationsanalyse werden in der mathematischen Forschung wie selbstverständlich aber eben stillschweigend und bloß implizit verwendet bzw. vermieden: Bei begriffsanalytischen Verfahren handelt es sich neben vielen anderen etwa um Verfahren der impliziten und expliziten Definition, der exemplarischen Einführung, und - für die Mathematik ganz wesentlich - das Verfahren der Abstraktion, aber auch um Verfahren wie „Begriffliche Zusammenhänge verstehen", „Begriffe integrativ analysieren", „Unbemerkte Implikationen aufdecken", „Trennscharfe Begriffe verwenden", „Absolute und relative Begriffe unterscheiden" und noch einige mehr. Als Verfahren der allgemeinen Argumentationsanalyse sind besonders hervorzuheben „Widerspruchsfreiheit prüfen", „Tautologien vermeiden", „Syllogismen verwenden", „Das Toulmin-Schema: Argumente inhaltlich prüfen" und „Den unendlichen Regress vermeiden" und noch einige mehr[35].

[33] Vgl. **MARTENS** 2003, S. 80 *ff.* und **ROHBECK** 2010, S. 79 *f.*
[34] Einen guten Überblick zu Geschichte und Inhalt der analytischen Philosophie findet sich in **LORENZ** 2004.
[35] Ausführliche Erläuterungen mit vielen weiteren Literaturhinweisen finden sich in **MARTENS** 2003, S. 109 -

Mit Hilfe der sprachanalytischen Philosophie zusammen mit den unterrichtsmethodischen Anregungen der modernen Philosophiedidaktik könnten diese Methoden nicht nur explizit und dadurch einem systematischen Training - etwa auch für leistungsschwächere Studierende - zugänglich gemacht werden. Vielmehr ist damit auch die Grundlage einer kritischen Methoden- bzw. "Selbstreflexion"[36] selbst gegeben, wenn beispielsweise die Verfahren der impliziten, expliziten sowie der exemplarischen Einführung[37] von Begriffen gegeneinander abgegrenzt und etwa in ihrer ontologischen, d.h. gegenstands-konstitutiven Funktion für die Mathematik[38] kritisch bewertet werden.

Wie können nun analytische Methoden beim selbständigen Studium mathematischer Beweise konkret helfen? Selbstverständlich gehorchen mathematische Texte und insbesondere mathematische Beweise strengen Regeln, gleichwohl sind sie aber nicht bzw. nur teilweise formal-logisch, d.h. streng deduktiv aufgebaut. Vielmehr bestehen mathematische Beweise aus einem Wechselspiel aus Prosa- und Formelsprache, dessen Wahrheits- bzw. Geltungsanspruch insbesondere für den mathematischen Anfänger gerade deshalb schwer nachzuvollziehen ist und kompliziert erscheint, weil es, vor der „formale(n) Logik als Kontrastfolie“[39] betrachtet, auch unvollständige Argumente enthält. Häufig werden in Beweisen Argumente in sehr verkürzter Form angegeben, und zwar ohne die verwendeten Prämissen, vorausgesetzte Hintergrundkenntnisse und die verwendeten Schlussregeln explizit zu benennen. Es „fehlt ein analoges Regelwerk, das in vertrackten Argumentationszusammenhängen konsultiert werden könnte”.[40] Wir schlagen deshalb vor, den (klassischen) Begriff des Arguments sowie die Methoden der Prämissen- und Schlussregelergänzung[41] explizit einzuführen und einzuüben. Dadurch wird ein explizit lehr- und lernbares Werkzeug zur präzisen und detaillierten Analyse und Bewertung einzelner Argumente durch deduktive Rekonstruktion bereitgestellt[42]. Inwiefern diese Methode mit einer Analyse der „Makrostruktur“[43] einer Beweisargumentation verbunden werden kann, so dass sich die deduktive Rekonstruktion nicht auf eine Untersuchung einzelner Details beschränkt, sondern den Blick auf den argumentativen Gesamtzusammenhang eröffnet, darüber wird in der Diskussion der Dialektik im nächsten Abschnitt noch zu reden sein.

Als alternatives Werkzeug zur detaillierten Argumentationsanalyse besonders geeignet erscheint uns auch das Toulmin-Schema. Hierbei handelt es sich um ein „Modell der inhaltlichen orientierten Argumentationsanalyse“, das aus der Einsicht entwickelt wurde, dass die formale Logik „nur eingeschränkt als Instrument für die Klärung alltagspraktischer Argumentationen brauchbar ist“[44]. Toulmin hat dieses Modell in eine eingängige Graphik wie folgt angeordnet[45]:

124.

[36] **TETENS** 2008, S. 24.

[37] Vgl. dazu etwa **JANICH/KAMBARTEL/ MITTELSTRASS**, S. 54 *f.*, 92 *ff.*

[38] Siehe dazu die sehr lesenswerte Einführung in die Philosophie der Mathematik in **THIEL** 1995

[39] Vgl. dazu **TETENS** 2004, S. 45 *ff.*

[40] **BENZ** 2010, S. 4.

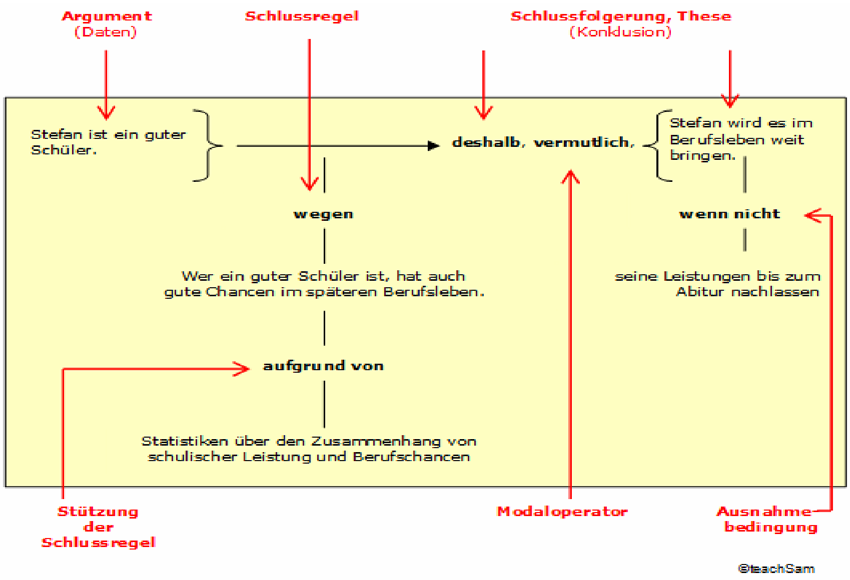
[41] Die Begriffe *Argument*, *Prämissen-* und *Schlussregelergänzung* werden sehr ausführlich und mit vielen Beispielen gestützt in dem sehr aufschlussreichen Buch **TETENS** 2004, hier insbesondere S. 38 *ff.*, erläutert.

[42] Wir vermuten, dass die explizite Einführung relevanter argumentationstheoretischer Werkzeuge in der bisherigen fachdidaktischen Diskussion (genau genommen nicht nur der Mathematik sondern fast aller Disziplinen an Schule und Hochschule) ein wesentlicher Schlüssel für ein „ursprüngliches Verstehen“ (Wagenschein), ein Verstehen, wie Mathematik „im Prinzip“ (von Hentig) funktioniert, sehr hilfreich sein kann. Vgl. dazu die Ausführungen in meinem Manuskript „Mehr Philosophie wagen im Mathematikunterricht – an Schule und Hochschule!“, das voraussichtlich am Jahresende erscheinen wird.

[43] Ein sehr anschauliches und auf die Lektüre mathematischer Beweise übertragbares Verfahren wird vorgestellt in **BENZ** 2010, S. 52 *ff.*

[44] **MARTENS** 2003, S. 120

[45] Zitiert nach http://www.teachsam.de/deutsch/d_rhetorik/argu/arg_mod_toul_4.htm (Stand: 18.05.2012)



Wir sehen den besonderen Vorteil des Toulmin-Schemas darin, dass es gerade für formal-logisch unvollständige Argumentationen innerhalb eines Beweises ein systematisches Suchraster zu deren logisch deduktiver Vervollständigung anbietet. Es trägt der Tatsache Rechnung, dass mathematische Beweise als schriftliche Texte verfasst sind, die sich - zumindest im Blick auf ihre sprachliche Oberfläche - nur graduell von anderen wissenschaftlichen und alltagssprachlichen Texten und Argumentationen unterscheiden, sich aber gleichwohl am Ideal deduktiver Gültigkeit orientieren. Jedes nach dem Toulmin-Schema korrekt rekonstruiertes Argument lässt sich auch als deduktiv gültiges Argument rekonstruieren[46].
Im Sinne einer konkreten didaktischen Anregung lassen sich - auch hier wieder ohne Anspruch auf Vollständigkeit und ohne hier alle Einzelheiten detailliert erläutern zu können - die mathematikdidaktischen Transformationen der analytischen Philosophie in einem Fragenkatalog zusammenfassen. Ähnlich wie schon beim Fragen- und Impulskatalog zum hermeneutischen Lesen eines Beweises besteht das Wesentliche dieses Ansatzes darin, das „Vorverständnis“ der Studierenden und das später erarbeitete „Beweisverständnis“ explizit zu machen und anschließend gegenüber zu stellen und zu vergleichen bzw. zu kontrastieren. Wieder können die Erwartungen bestätigt, enttäuscht oder übertroffen werden. Wieder kann dieses Verfahren wiederholt und Die Methode der Erwartung und Lektüreergebnis miteinander konfrontiert werden, indem man nach einer (ersten) Erarbeitungsphase eines Beweises den Fokus auf bestehende Lücken im Argumentationsgang (wie sie ja beispielsweise durch die Verwendung des Toulmin-Schemas genau lokalisiert sein könnten) legt und im Katalog von vorne beginnt. Somit ermöglicht und fördert auch dieser Fragen- und Impulskatalog ein eigenständiges und selbstgesteuertes Erarbeiten mathematischer Beweise. Die Fragen und Impulse knüpfen auch hier wieder an die individuellen Vorkenntnisse der Studierenden an und überlassen ihm die Entscheidung, wie oft der Dreischritt „Vorverständnis klären – Beweisverständnis erarbeiten – Konfrontation von Erwartung und Ergebnis“ wiederholt wird. Letztlich ist die Durchführbarkeit dieses Dreischritts unabhängig von den Vorgaben des Lehrenden und ist somit auf die Autonomie des Studierenden ausgelegt. Dieses Verfahren ist als Lernstrategie besonders geeignet, weil es den Nutzer immer wieder auffordert, seine eigenen Kenntnisse und Fähigkeiten einzuschätzen und seinen Lernprozess zu reflektieren, was zu einem selbstgesteuerten Lernprozess unabdingbar dazugehört.

[46] **BENZ** 2010, S. 37.

Fragen- und Impulskatalog zum analytischen Lesen mathematischer Beweise

1. Vorerschließung der begrifflichen und argumentativen Voraussetzungen

Was sind die wesentlichen Gegenstände und Begriffe, über die die Behauptung etwas aussagt? Auf welche einfacheren, notwendigen und hinreichenden Begriffe lassen sie sich zurückführen? Wie hängen die Begriffe mit anderen bereits bekannten Begriffen zusammen? Wie lautet die logische Form der zu beweisenden Behauptung? Wie lässt sich die zu beweisende Behauptung so reformulieren, dass die wesentlichen Quantoren (Für-Alle-Quantor, Es-Gibt-Quantor) und logischen Partikeln ("und", "oder" und "nicht") ausdrücklich benannt werden. Welche Beweisstrategien sind angesichts der logischen Form des Satzes denkbar? Wie lassen sich für jede Strategie die entsprechenden Voraussetzungen und Behauptungen formulieren? Wie könnten wesentliche Schritte für einen Beweis aussehen? Wo liegt/liegen die wesentliche(n) Schwierigkeit(en) beim Beweis? Wo liegt die Ursache dafür?

2. Schrittweise Analyse des Beweises

Gibt es im Beweistext vollständige Argumente? Sind diese Argumente schlüssig und nachvollziehbar, d.h. sind die Prämissen wahr (falls ihre Wahrheit nicht klar ist sind Sie zunächst als Annahmen um des Arguments willen zu betrachten, deren Geltungsausweis nur für den Moment aufgeschoben wird) und ist die zugrundeliegende Schlussregel wahr? Gibt es unvollständige Argumente? Lassen sich diese Argumente vervollständigen zu schlüssigen Argumenten, indem man etwa auf die Voraussetzungen des Beweises bereits bewiesene Thesen oder auf bereits bekanntes Wissen aus Forschung und/oder bekannten Lehrmaterialien zurückgreift und die Methode der Schlussregel-Ergänzung oder der Prämissenergänzung anwendet. Wie lassen sich die Argumente in Beziehung zueinander setzten? Wie lautet die Argumentationsstruktur des Beweises? Ist der Beweis insgesamt schlüssig?

3. Konfrontation von Erwartung und Ergebnis

Welche der im ersten Schritt formulierten Vermutungen, Erwartungen und Ansätze haben sich bestätigt, wurden erfüllt oder ließen sich im Beweis wiederfinden. Wo lagen die wesentlichen Abweichungen und Unterschiede? Wie lassen sich diese Unterschiede erklären? Welches Argument ist besonders bemerkenswert und lehrreich?

4. Mathematikdidaktisches Potential der Dialektik

Wie in jeder Wissenschaft, so ist auch die Mathematik auf „Verständlichkeit" und „Mitteilung"[47] angewiesen. Mathematik ist ein hochkommunikatives Geschehen. Mathematik wie jede Wissenschaft läuft damit "auf Belehrung hinaus. Sie ist das Verfahren, durch das ich sichern möchte, dass du siehst, was ich sehe."[48] In einer Zeit in der Spezialisierung und die Menge der Forschungsliteratur ins unermessliche zu steigen scheint, kommt es immer mehr darauf an, dass Wissenschaftler gleichsam als „Ersatzleser" füreinander fungieren und sich über die Ergebnisse ihrer Forschung und wichtigsten Einsichten aus eigener Lektüre gegenseitig informieren. „Wissen, das sich nicht intersubjektiv mitteilen und intersubjektiv nachprüfen lässt, verwirkt auf Dauer den Anspruch, wissenschaftliches Wissen zu sein." „Die Forscher sind gleichberechtigte Mitdiskutanten in den kritischen und daher stets kontroversen wissenschaftlichen Debatten."[49]

Für die Erarbeitung eines mathematischen Beweises hat dieses Ziel eine wichtige Konsequenz: Der Leser kann sich nicht darauf beschränken, einen Beweis gleichsam im inneren Dialog also im Selbstgespräch nachzuvollziehen und zu verstehen. Vielmehr kommt

[47] **HENTIG** 2003, S. 176*f.*
[48] **HENTIG** 2003, S. 175.
[49] **TETENS** 2008, S. 26.

es darauf an, einen Beweis im Blick auf die Interessen, das Vorwissen und das vorauszusetzende „Ausgangsniveau“[50] seiner Gesprächspartner, Kollegen und Mitforscher aufzubereiten.
Selbst für mathematische Beweise ist es nicht hinreichend, bloß die logische Gültigkeit ihrer Argumentationsmuster und Schlussfolgerungen zu erfüllen. Die Überzeugungskraft eines Beweises hängt von vielen weiteren Faktoren ab. Jeder Beweis richtet sich als Argumentation immer auch an konkrete Leser oder Hörer, die als Adressaten ernst zu nehmen sind. Damit hängt die Überzeugungskraft eines Beweises auch von der Art und Weise seiner Darstellung ab. Es geht in einem Beweis also nicht nur darum, einen bestimmten Sachverhalt zu begründen, sondern zugleich auch bestimmte Adressaten, d.h. Leser des Beweises von seiner Richtigkeit zu überzeugen. In diesem Sinn spielen auch pragmatische, d.h. ästhetische, kommunikative und nicht zuletzt rhetorische Aspekte für einen geglückten Beweis eine zentrale Rolle.
Anderen die Grundgedanken eines Beweises verständlich mitzuteilen ist eine eigene, und zwar eine didaktische Schwierigkeit. Dann wird nämlich ein Beweis nicht mehr ausschließlich unter dem Gesichtspunkt der Geltung betrachtet; vielmehr spielen dann auch der konkrete potentielle Adressatenkreis und die konkrete Situation, für den und in der ein Beweis aufbereitet wird, eine zentrale Rolle. In der Mathematikdidaktik gibt es bisher allerdings keine explizit formulierten Methoden, mit denen sich auf systematische Weise die didaktische Reduktion eines Beweises erzeugen ließe[51]. Mathematisches Kommunizieren und damit auch die Vermittlung mathematischer Gedanken und Argumentationen, d.h. Beweise ist als zentrales Anliegen und als wesentliche Kompetenz des Mathematikunterrichts an Schule und Hochschule allseits anerkannt. Didaktisch-methodische Anregungen zur Verwirklichung dieses Ziels beschränken sich allerdings darauf, dass im Zweifelsfall der Dozent oder Lehrer bestimmt, was an einem mathematischen Gedankengang wesentlich ist, er also als „allwissender Sachwalter“ und „letzte Instanz“ fungiert.
Dass nun ausgerechnet eine philosophische Denkrichtung wie die Dialektik[52] konkrete Methodenvorschläge gewinnen lassen sollen, mag auf den ersten Blick überraschend erscheinen: die Dialektik wird nicht selten mit “Gelaber” und “endlosem Meinungsaustausch des Hin-und-Her-Redens”, mit “manipulativen oder bloß unernsthaftem Gerede”[53], mit “Scheingefechten” und bloßer Wortstreiterei und Rhetorik assoziiert. Aber diese Einschätzung ist eine einseitige Übertreibung. Tatsächlich bestand vom Beginn ihrer Geschichte in der griechischen Antike an eine Grundidee dialektischen Denkens darin, Methoden entwickelt zu haben, wie man sich mit Denkwidersprüchen auseinander setzen und wie man reale, vernunft- und wahrheitsorientierte Dialoge mit konkreten Personen, d.h. letztlich adressatenbezogen führen kann. Die didaktische Rechtfertigung dieser Zuspitzung von Geschichte und Systematik der Dialektik im Verständnis des Begriffs Dialektik liegt dabei darin, dass eine als “Dialektik als Dialogprozess” konkretisierte dialektische Methode Offenheit und Anti-Dogmatismus als zentrale Merkmale hervorhebt, die dadurch “einen Dialog erst ermöglichen bzw. sinnvoll machen.”[54]
Als konkrete Beispiele für die didaktische Transformation spezifisch dialektischer Denkmethoden wollen wir die rhetorische Fünf-Satz-Technik, die Methode des „Argumente

[50] Vgl. dazu insbesondere **BRUDER** 2006, S.78 *f.*
[51] Eine solche didaktische Kompetenz setzt voraus, dass man auch das „Ausgangsniveau“ seiner Gesprächspartner methodisch geleitet einschätzen kann. Zwar gibt es zumindest im Rahmen der Schuldidaktik erste Ansätze einer Theorie dazu, vgl. etwa die Ansätze in **BRUDER/LEUDERS/BÜCHTER** 2006, was Basiskompetenzen sind und wie man sie gewinnen kann. Wie diese Kompetenzen allerdings selber, und zwar an Lernende vermittelt werden können, scheint aber noch gänzlich offen zu sein.
[52] Für einen philosophiedidaktisch gewendeten ersten Überblick mit vielen weiteren Literaturhinweisen siehe **ROHBECK** 2002 und allgemeiner **SCHWEMMER** 2004.
[53] **MARTENS** 2003, S. 124.
[54] **DRAKEN** 2011, S. 73.

Verlängerns oder Verkürzens“ und die Methode des "Strohmanns" genauer beschreiben. Ganz konkret könnte die rhetorische Fünf-Satz-Technik helfen, sich aus den technischen Details eines Beweises zu lösen, einen Wechsel von der „Froschperspektive“ und der „Vogelperspektive“[55] zu vollziehen und auch die groben Linien und den Gesamtzusammenhang eines Beweises, d.h. seine Beweisstruktur als Überblick und Wegweiser der Argumentationsrichtung in den Blick zu nehmen, zu erarbeiten, zu didaktisieren und somit schließlich vermittelbar zu machen. Sie ist eine Methode, die bereits in der Antike verwendet wurde und sich ungebrochener Aktualität bei Gericht erfreut. Ihr wesentliches Ziel ist es, „sich von der eigenen Denkbewegung und ihrer inneren Logik lösen und eine Neuordnung der Inhalte zur Teilnahme des Hörers (bzw. des Lesers oder Mitdiskutanten, J.S.) vornehmen“[56], Überflüssiges streichen und das Verbleibende in ein logisches Korsett pressen und Gedankenpläne situativ, d.h. auf die gegebene Redesituation bezogen anzulegen. Außerdem unterstützen diese Methoden den Prozess, vereinzelte Teilaspekte eines Zusammenhangs als Momente des Ganzen zu begreifen und in diesem Sinn in einen größeren Zusammenhang zu integrieren.
Im Wesentlichen werden fünf Argumentteile in ihrer Funktion (Einleitung, Hauptteil, Schluss) unterschieden und grafisch in einem Blockschema angeordnet, d.h. aneinandergereiht oder gegenübergestellt. Jedem Schema entsprechen dabei auch bestimmte Formulierungshilfen, mit denen die Hauptargumente eines Beweises gegenübergestellt und abgewogen werden können, wodurch außerdem die erfahrungsgemäß insbesondere für Anfänger schwierige Synthese prosa- und formalsprachlicher Aspekte des Beweises unterstützt wird.[57]
Liegt eine ausführliche deduktive Rekonstruktion eines Beweises bereits vor, so liefert die Methode des „Argumente Verlängerns oder Verkürzens“[58] einen Ansatz, die Ausführlichkeit und Länge einer Argumentation adressatenbezogen, d.h die Vorkenntnisse, Interessen und das Ausgangsniveau der Mitdiskutanden berücksichtigend aufzuarbeiten. Ausgehend von der Standardform logisch schlüssiger Argumente (Prämissen, Schlussregel und Konklusion) würde man eine verkürzte Form erhalten, indem man das Argument in einen Wenn-Dann-Satz zusammenfasst und dabei die Schlussregel weglässt und nur die wesentlichen Prämissen aufgreift. Die verlängerte Form könnte dann in einem Toulmin-Schema[59] dargestellt werden. Eine Stärke dieses Verfahrens sehen wir darin, dass es insbesondere für den mathematischen Anfänger das Problem des Adressatenbezugs fokussiert und reduziert auf die Entscheidung zwischen konkreten Darstellungsalternativen.
Als weitere Anwendung dialektischer Methoden könnte auch die rhetorisch-argumentative Variante des "Strohmanns"[60], einem in Diskussionen häufig verwendeten Täuschungsmanöver, hilfreich sein. Mathematische Argumentationen sind zwar sicher nicht das Ergebnis gezielter Manipulation, aber die Vorstellung davon könnte helfen, sich die (logische) Schlüssigkeit einer Argumentation selbständig anzueignen, und zwar indem man systematisch alle Ansätze zu ihrer Kritik findet, formuliert und zu entkräften sucht: Gerade ein mathematischer Beweis kann streng genommen erst dann als verstanden gelten, wenn alle potentiellen Einwände gegen ihn widerlegt wurden. Deshalb wäre es sicher hilfreich, über Methoden zu verfügen, mit denen ein Beweis von „möglichst vielen Seiten in Rede und

---

[55] Diese Bemerkungen sind in enger Anlehnung an die lesenswerten Ausführungen von **LEHN** 2012 formuliert.
[56] **DIETZE** 2005, S. 123.
[57] Für einen ersten Überblick mit zahlreichen Literaturhinweisen und vielen Beispielen vgl. DIETZE 2005. Eine ausführlichere Analyse, die einen unmittelbaren mathematikdidaktischen Transfer eröffnet, findet sich in **ROHBECK** 2010, S. 213 *ff*.
[58] Diese Methode wurde unseres Wissens zuerst für den Philosophieunterricht ausführlich dargestellt in **ROHBECK 2010**, S. 219 *ff*.
[59] Vgl. dazu die Darstellung im 3. Abschnitt dieser Arbeit.
[60] Eine exakte Definition gibt z.B**. SOLSO** 2004, S.397.

Gegenrede“[61] untersucht und alle sinnvoll möglichen Einwände gegen ihn Beweis systematisch aufgedeckt werden können. Ein wichtiger Nutzen solcher Methoden würde nicht zuletzt auch darin liegen, die Beweisempfindlichkeit gerade auch von mathematischen Anfängern systematisch zu entwickeln und zu trainieren. Ganz konkret könnte man eine reduzierte Variante der dialogischen Logik[62] verwenden, wie er etwa im Rahmen des Erlanger Konstruktivismus[63] entwickelt wurde. Mathematisches Beweisen und Argumentieren würde dann als Dialog schematisiert werden, in dem abwechselnd ein Proponent und ein Opponent ein Dialogspiel im Sinne von Angriff und Verteidigung von gesetzten Thesen nach genau festgelegten Regeln durchführen. Eine Pointe dieses Verfahrens besteht gerade darin, dass es dabei nur um wenige Regeln geht, mit deren Hilfe aber doch - das kann formallogisch für den vollformalistischen dialogischen Kalkül sogar bewiesen werden - alle logisch relevanten Fragen bzw. Einwände formuliert werden können.

5. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir zu zeigen versucht, dass und wie sich philosophische Methoden in konkrete mathematische Denk- und Arbeitsmethoden transformieren lassen. Inwieweit sich dieser Ansatz auch praktisch und das heißt nicht zuletzt auch für Studienanfänger als hilfreich erweisen wird, muss sich in Zukunft zeigen. Über erste Erfahrungen dieses Ansatzes im Rahmen der Lehrerbildung in Schleswig-Holstein und in mathematischen Vorkursen und Anfängervorlesungen der Universität zu Lübeck wird ab Herbst 2012[64] zu berichten sein. Eine Durchführbarkeit dieses Ansatzes in anderen Disziplinen müsste nach Aufarbeitung des Materials möglich sein und könnte bei Interesse von entsprechenden Kursleitern vorbereitet werden.

6. Literaturverzeichnis

BETZ, G.: *Theorie dialektischer Strukturen.* Frankfurt a. M. 2010.

BLUM, W. u. a. (Hrsg.): *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen***. Berlin 2006.**

BRUDER, R.: *Sicherung von Basiskompetenzen.* In **BRUDER, R./LEUDERS, T./BÜCHTER, A.**: *Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten.* Berlin 2006, S. 53 – 79.

BRÜNING, B.: *Philosophieren in der Sekundarstufe: Methoden und Medien.* Weinheim, Basel, Berlin 2003.

DIETZE, M.: *An fünf Fingern abgezählt – die Disposition im Philosophieunterricht.* In **MARTENS, E.** u. a. (Hrsg.): *Zeitschrift für Didaktik der Philosophie und Ethik*, 27. Jg. (2005), S. 122 – 128.

DRAKEN, K.: *Sokrates als moderner Lehrer. Eine sokratisch reflektierte Methodik und ein methodisch reflektierter Sokrates für den Philosophie- und Ethikunterricht*. Berlin 2011.

GADAMER, H.-G.: *Wahrheit und Methode. Grundzüge einer philosophischen Hermeneutik.* In **Ders.**: *Ges. Werke, Bd I*, Tübingen 1990.

---

[61] **ROHBECK** 2010, S. 121.

[62] Für einen Einblick siehe die Aufsatzsammlung in **LORENZEN/LORENZ** 1978 sowie die didaktisch sehr gelungene Einführung in **THIEL** 1995, S. 72 *ff*.

[63] Immer noch mustergültig dargestellt in **KAMLAH/LORENZEN** 1967, für Weiterentwicklung speziell in der Philosophie der Mathematik vergleiche man etwa die sehr konsistente Ausarbeitung in **STEKELER-WEITHOFER** 2008.

[64] Vgl. dazu die Fußnote 9.

HEINZ; B.: *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Wien 2000.
HENTIG; H. v.: *Bildung. Ein Essay*. Weinheim und Basel 19999.
HENTIG, H. v.: *Wissenschaft. Eine Kritik.* Weinheim und Basel 2003.
JANICH, P., KAMBARTEL, F., MITTELSTRASS, J.: *Wissenschaftstheorie als Wissenschaftskritik.* Frankfurt am Main 1974.
JANICH, P.: *Kleine Philosophie der Naturwissenschaften*. München 1997.
KAMLAH, W./LORENZEN, P.*: Logische Propädeutik. Vorschule des vernünftigen Redens*. Mannheim 1967.
KRATZ, H.: *Wege zu einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht. Ein Studien- und Praxisbuch für die Sekundarstufe.* Seelze 2011.
LEHN, M.: *Wie halte ich einen Seminarvortrag?* (http:/www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/le (Stand: 18.05.2012))
LORENZEN, P.: *Logik und Hermeneutik.* In **LORENZEN, P.**: *Konstruktive Wissenschaftstheorie.* Frankfurt a. M. 1974, S. 11 – 21.
LORENZ, K.: *Analytische Philosophie*. In **MITTELSTRASS, J.** (Hrsg.): *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie Band 3.* Stuttgart 2004, S. 139 – 145.
LORENZEN, P./LORENZ, K.: *Dialogische Logik*. Darmstadt 1978.
MARTENS, E.: *Methodik des Ethik- und Philosophieunterrichts. Philosophieren als elementare Kulturtechnik.* Hannover 2003.
MEHRTENS, H.: *Moderne Sprache Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme.* Frankfurt a. M. 1990.
MEYER, H.: *Leitfaden Unterrichtsvorbereitung*. Berlin 2007.
MITTELSTRASS, J.: *Neuzeit und Aufklärung. Studien zur Entstehung der neuzeitlichen Wissenschaft und Philosophie.* Berlin und New York 1970.
MITTELSTRASS, J.: *Die Möglichkeit von Wissenschaft*. Frankfurt am Main 1974.
MITTELSTRASS, J.: *Wissenschaft als Lebensform. Reden über philosophische Orientierung in Wissenschaft und Universität.* Frankfurt a. M. 1982.
MITTELSTRASS, J.: *Der Flug der Eule. Von der Vernunft der Wissenschaft und der Aufgabe der Philosophie.* Frankfurt am Main 1989.
MITTELSTRASS, J.: *Philosophie*. In **MITTELSTRASS, J.** (Hrsg.): *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie Band 3.* Stuttgart 2004, S. 131 – 139.
RENTSCH, T.: *Der Status der Philosophie*. In **BREITENSTEIN, P./ STEENBLOCK, V./ SIEBERT, J.** (Hrsg.): *Geschichte – Kultur – Bildung. Philosophische Denkrichtungen.* Hannover 2007, S. ???.
RIDDER, L.: *Textarbeit im Philosophieunterricht aus hermeneutisch-intentionalistischer Sicht am Beispiel des Homo-mensura-Satzes von Protagoras.* In **MARTENS, E.** u. a. (Hrsg.): *Philosophie Ethik. Zeitschrift für Didaktik der Philosophie und Ethik.* 2/2000, S. 124 – 132.
ROHBECK, J.: *Didaktik der Philosophie und Ethik.* Dresden [2]2010.
ROHBECK, J.: *Verkehrte Welt – Dialektik als Methode.* In **Ders.** (Hrsg.): *Denkestile der Philosophie*. Dresden 2002, S. 29 – 62.
SCHWEMMER, O.: *Dialektik.* In **MITTELSTRASS, J.** (Hrsg.): *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie Band 1.* Stuttgart 2004, S. 463 - 468.
SOLSO, R.: *Kognitive Psychologie.* Heidelberg 2004.
SPAEMANN, R.: *Die kontroverse Natur der Philoso*phie. In **Ders.**: *Philosophische Essays.* Stuttgart 1983, S. 104 - 129.
STEKELER-WEITHOFER, P.: *Formen der Anschauung. Eine Philosophie der Mathematik*. Berlin 2008.
TETENS, H.: *Philosophisches Argumentieren.* München 2004.
TETENS, H.: Die Idee der Universität und ihre Zukunft. In *Denkströme. Journal der Sächsischen Akademie der Wissenschaften*, Heft 1 (2008), http://repo.saw-

leipzig.de:80/pubman/item/escidoc:11009/component/escidoc:16040/denkstroeme-heft1_24-33_tetens.pdf, S. 24-33 (Stand 27.05.2012)
THIEL, C.: *Das Begründungsproblem der Mathematik und die Philosophie.* In **KAMBARTEL, F./MITTELSTRASS, J.** (Hrg.): *Zum normativen Fundament der Wissenschaft.* Frankfurt am Main 1973, S. 91 – 114.
THIEL, C.: *Philosophie und Mathematik. Eine Einführung in ihre Wechselwirkungen und in die Philosophie der Mathematik.* Darmstadt 1995.
TIEDEMANN, M.: *Ethische Orientierung für Jugendliche.* Berlin und Münster 2004
UFER, S., HEINZE, A., KUNTZE, S., RUDOLPH-ALBERT, F.: *Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie.* In *JMD* 30 (2009) H. 1, S. 30 – 54.
VERAART, A./WIMMER, R.: *Hermeneutik.* In **MITTELSTRASS, J.** (Hrsg.): *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie Band 2.* Stuttgart 2004, S. 85 – 90.

7. Anhang

	Hermeneutische Perspektive	Phänomenologische Perspektive	Dialektische Perspektive	Spekulative Perspektive	Analytische Perspektive
Begriff	Unterscheidungsinteressen hinter den Begriffen aufdecken und wissenschaftsgeschichtlich einordnen. Die Zweckmäßigkeit neuer Definitionen begriffsgeschichtlich ausweisen.	Unterscheidungsinteressen hinter den Begriffen an beobachtbaren Phänomenen und Situationen bzw. der Alltags- und der Wissenschaftspraxis verdeutlichen und beschreiben. Beobachtungen und Phänomene interessenbezogen in Unterscheidungen und Begriffe fassen.	Die Zweckmäßigkeit begrifflicher Unterscheidungen im (inneren) Dialog durch Abwägung von Pro- und Contra-Argumente radikal in Frage stellen und überprüfen und anderen verständlich mitteilen.	Alternative Begriffsbildungen finden präzise definieren und auf Zweckmäßigkeit und Relevanz überprüfen.	Begriffe exakt und angemessen definieren und präzise verwenden.
Satz	Argumentationen und Beweise mit dem theoriegeschichtlichen (und auch eigenen) Vorwissen in Verbindung setzen. Den Erkenntnisgewinn neuer Argumente und Beweise relativ zum theoriegeschichtlichen Vorwissen formulieren.	Sätze (und ihre Begründung) als Interpretation und Verallgemeinerung beobachtbarer (auch innermathematisch gegebener) Situationen, Wissenschafts- und Alltagspraxen verstehen und beurteilen. Sätze (und ihre Beweise) als Vermutungen aus dem Vergleich und der Verallgemeinerung einzelner Beobachtungen gewinnen.	Argumentationen und Beweise als (inneren) Dialog, als Abwägung von Pro- und Contra-Argumenten zuspitzen, rekonstruieren bzw. entwickeln und anderen verständlich mitteilen.	Sätze aufgreifen, ihre Bedeutung und Deutung sowie ihre Prämissen gedanklich variieren und kreativ weiterentwickeln zu neuen, auf Stichhaltigkeit und Relevanz zu prüfende Vermutungen.	Argumentationen und Beweise auf Stichhaltigkeit und Gültigkeit überprüfen und selber schlüssige Beweise formulieren.
Theorie	Die Geschichte einzelner Theorien aus wirkungs- und gründegeschichtlicher Perspektive rekonstruieren und Theorien oder Teile davon unter der Perspektive begründeter Weiterentwicklung zu konstruieren.	Vorwissenschaftliche, vorgängig gegebene außer- und innermathematische Praxen und Handlungs- und Theoriezusammenhänge als Grundlage für die (logische) Genese wissenschaftlicher Theorien angeben bzw. mit der Konstruktion neuer Ansätze und Theorien an sie anschließen.	Zweckmäßigkeit und Aufbau einer Theorie und die Unterscheidung zwischen ihren zentralen und nicht-zentralen Bestandteilen im (inneren) Dialog, als Abwägung von Pro- und Contra-Argumenten radikal in Frage stellen und überprüfen und anderen verständlich mitteilen.	Grundlegende Annahmen und Voraussetzungen von Theorien variieren, weiterentwickeln und die Ergebnisse auf innertheoretische und praktische Relevanz, Stichhaltigkeit und argumentative Stringenz überprüfen.	Theorien als logisch-deduktive Zusammenhänge bewiesener Sätze rekonstruieren und aufbauen.